

ЛЕКЦИИ  
ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

ЛУКЪЯНОВ Л.Г., ШИРМИН Г.И.

Алматы 2009

УДК 521.1(075.8)

ББК 22.62

Л 90 **Рецензент** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А.Дородницына РАН Гребеников Е.А.

**Научный редактор** доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского автомобильно-дорожного института (Государственного технического университета) Журавлев С.Г.

Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И.

Л 90 Лекции по небесной механике: Учеб. пособ. для вузов. -

Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.

Курс лекций по небесной механике включает в себя основы классической небесной механики - теорию невозмущенного движения небесных тел и теорию возмущений.

Особое внимание уделено ограниченной задаче трех тел, имеющей множество эффективных практических приложений в астрономии, астрофизике и астродинамике. Рассматривается общая задача трех тел. В этих задачах излагаются новые оригинальные результаты, полученные авторами.

Дается краткое введение в астродинамику, как теорию движения искусственных спутников Земли и теорию межпланетных перелетов космических аппаратов. Приведен перечень вопросов для аттестации слушателей курса.

Курс лекций предназначен не только для студентов и аспирантов астрономических специализаций, но и для специалистов других отраслей точного естествознания. Издание книги поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 08-02-00308).

УДК 521.1(075.8)

ББК 22.62

Светлой памяти нашего учителя  
профессора Московского университета  
Георгия Николаевича Дубошина  
посвящается

## ВВЕДЕНИЕ

Небесной Механикой называется раздел астрономии, занимающийся изучением закономерностей в движениях небесных тел под действием различных природных причин, вызывающих или изменяющих эти движения. Поэтому предметом Небесной Механики является механическое движение - изменение с течением времени взаимного расположения и ориентации небесных тел и их систем.

Существующие теории, описывающие поступательно-вращательные механические движения небесных тел, - это именно та база, которая во все времена давала человечеству возможность познавать строение и эволюцию Вселенной. В настоящее время считается общепризнанным фактом, что "только теория движения тел Солнечной системы позволила создать ту пространственно-временную систему отсчета, которая, будучи как бы материализована звездными каталогами и астрономическими ежегодниками, является фундаментом всех исследований, имеющих дело с измерением пространства и времени" (Субботин, 1968).

Наряду с введенным Пьером Лапасом (1799 г.) термином *небесная механика* до сих пор имеет широкое применение введенный Ф.Т.Шубертом (1798 г.) и употребляемый почти в том же самом смысле термин *теоретическая астрономия*, основной и притом древнейшей частью которой является теория движения больших планет.

Отличия в этих терминах разные авторы объясняют по-разному. Чаще всего считают, что Теоретическая астрономия имеет своей целью изучение движения реально существующих небесных тел и открытие законов природы, управляющих этими движениями, в то время как Небесная механика исследует решения модельных задач об идеализирован-

ных космических объектах, движения которых происходят под действием абсолютизированных законов природы.

Иначе говоря, с этой точки зрения Теоретическая астрономия есть часть естествознания, тогда как Небесная механика является математической дисциплиной, по применяемым методам вполне аналогичной математической физике. По сути дела, благодаря широкому использованию всех средств "чистой", прикладной и вычислительной математики, небесная механика вполне могла бы именоваться, например, математической астрономией. И именно так и называлась когда-то (1933 г.) одна из астрономических специальностей механико-математического факультета Московского университета.

С момента своего возникновения и до сих пор Небесная механика служит для естествознания научным полигоном, на котором испытываются новейшие средства математического анализа. Более того, подавляющее большинство всех наиболее эффективных средств и методов теоретического исследования "генетически" связаны с задачами небесной механики. В качестве хрестоматийного примера можно сослаться на дифференциальное и интегральное исчисление (исчисление бесконечно малых), специально разработанное Исааком Ньютоном (1687г.) в качестве математического аппарата механики для решения, прежде всего, астрономических задач с целью создания теории движения тел Солнечной системы. Да и методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, входящие сейчас в число мощнейших средств компьютерного моделирования динамических систем, впервые были разработаны Леонардом Эйлером (первым методом численного интегрирования был метод ломаных Эйлера) в связи с практическими потребностями наблюдательной астрономии.

Небесная механика, как старейший раздел теоретической физики, не только может, но по праву должна считаться первоосновой всего точного естествознания и краеугольным камнем современной научной картины мира.

Физическими основами классической Небесной механики

являются механика Ньютона и теория пространства, времени и тяготения, изложенные в его знаменитом труде "Математические начала натуральной философии" (1687 г.).

В небесной механике для описания движений небесных тел в зависимости от конкретных условий используются различные физические модели - идеализированные космические объекты. Например, *материальная точка* - это тело, обладающее массой и скоростью, размеры, форма и внутреннее строение которого в условиях рассматриваемой задачи существенного значения не имеют. В частности, так как взаимные расстояния между Солнцем и большими планетами значительно превышают их линейные размеры, то приближенно их можно рассматривать как материальные точки. Именно благодаря этому обстоятельству Исаак Ньютон смог построить первую динамическую теорию планетных движений.

Положение материальной точки, изображающей конкретный небесный объект, всегда определяется по отношению к некоторому, произвольно выбранному небесному телу, называемому *телом отсчета*. Совокупность тела отсчета, системы координат и часов (в качестве устройства для отсчета времени) называется *системой отсчета*, к которой принято относить положение и скорость исследуемого объекта в рассматриваемый момент времени.

*Траектория* движения небесного тела (*орбита*) - это геометрическое место его положений на рассматриваемом временном интервале, то есть линия, описываемая материальной точкой в пространстве. *Закон движения*, как известная зависимость состояния движения исследуемого объекта от времени, задается "кинематическими уравнениями движения", представляющими собой не что иное как параметрические уравнения траектории.

Три закона Ньютона, равно как и открытый им *закон всемирного тяготения*, - это аксиоматически заданные метафизические гипотезы, рациональное обоснование которых находится за пределами классической механики.

Первый закон движения в формулировке самого Исаака Ньютона утверждает, что "всякое тело сохраняет состояние

покоя или прямолинейного равномерного движения, пока и поскольку оно не будет вынуждено изменить это состояние под воздействием других тел”.

Другая формулировка первого закона Ньютона (в форме *закона инерции*) гласит: ”существуют такие системы отсчета, в которых материальная точка сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения”. Такие системы отсчета называются *инерциальными*. Другими словами, инерциальной является система отсчета, в которой материальная точка вследствие нулевой равнодействующей внешних сил не подвержена воздействию со стороны других тел и потому движется по инерции, то есть прямолинейно и равномерно. Любая система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы отсчета, также является инерциальной. Система же отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы с ускорением, называется ”неинерциальной” системой отсчета.

Эквивалентность механических свойств всех инерциальных систем отсчета составляет содержание *механического принципа относительности* (принципа относительности Галилея). Это значит, что во всех инерциальных системах отсчета законы механики действуют одинаково. В частности, никакими механическими опытами внутри инерциальной системы отсчета невозможно оценить скорость движения системы.

Присущее всем материальным телам свойство оказывать сопротивление изменению величины или направления их скорости проявляется как *инертность* состояния движения. Мерой инертности тела служит его *инертная масса*, в отличие от *гравитационной массы* - физической величины, являющейся мерой его гравитационных свойств и играющей роль ”гравитационного заряда”.

Важной механической характеристикой материальной частицы является *количество движения (импульс массы)* - векторная величина, численно равная произведению массы на скорость и имеющая направление скорости.

В качестве меры механического воздействия на тело со

стороны других материальных объектов (тел или полей), в результате которого изменяется его импульс, выступает *сила* - векторная величина, в каждый момент времени характеризующаяся числовым значением, пространственным направлением и точкой приложения.

Согласно Второму закону Ньютона "сила, действующая на материальную точку в инерциальной системе отсчета, равна произведению ее массы на сообщаемое этой силой ускорение". Это основной закон динамики, так как, устанавливая пропорциональность между ускорением и действующей силой, он задает тем самым *динамические уравнения движения* частицы в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно второй закон механики предполагает эквивалентность инертной и гравитационной масс.

Оригинальная формулировка второго закона классической механики, данная Ньютоном гласит: "в инерциальной системе отсчета скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе".

Если на материальную частицу одновременно действуют несколько сил, то каждая из них сообщает ей ускорение согласно Второму закону Ньютона, независимо от других действующих сил. Результирующее ускорение частицы равно векторной сумме всех ускорений, сообщенных каждой силой в отдельности. Это высказывание формулирует принцип независимости действия сил - *принцип суперпозиции* классической небесной механики.

Третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия) утверждает, что "в инерциальных системах отсчета всякое действие между материальными частицами имеет характер взаимодействия. Силы взаимодействия однородны по своей природе, всегда равны по абсолютной величине и противоположно направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения". Третий закон Ньютона - основа и причина существования систем небесных тел, то есть совокупностей космических объектов, рассматриваемых как единое целое.

В рамках классической небесной механики в качестве дей-

ствующих сил обычно рассматриваются силы гравитационного притяжения (*гравитационные силы*), силы упругих деформаций (*силы упругости*) и силы сопротивления среды (*силы трения*). Силы упругости и силы трения являются частными случаями электромагнитных сил, наряду с гравитационными силами относящихся к классу фундаментальных сил и представляющих (вместе с сильными и слабыми ядерными силами) четыре известных сейчас фундаментальных физических взаимодействия. На космическом пространственно-временном уровне организации материи преобладающим является гравитационное взаимодействие. Именно по этой причине главная роль в астрономии отводится, в первую очередь, силам гравитационной природы.

Согласно закону всемирного тяготения Исаака Ньютона "между двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, направленная вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие точки, прямо пропорциональная произведению их масс и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними". Закон всемирного тяготения (так называемый "закон обратных квадратов") - это главное звено ньютоновой теории тяготения. По мнению Анри Пуанкаре проверка справедливости закона всемирного тяготения является главной целью небесной механики.

Небесная механика на протяжении всей истории ее становления была источником новых идей, методов и даже новых направлений в математике, традиционно являясь плодотворным полем приложения усилий для подавляющего большинства выдающихся ученых. Среди имен классиков точного естествознания (не только астрономов, но и математиков) практически отсутствуют такие, кто не отдал бы должную дань уважения небесной механике.

Не только в методы решения ее задач, но и в методику преподавания существенный вклад внесли и знаменитые деятели Российской науки (Л.Эйлер, М.В.Остроградский, А.М.Ляпунов, А.Н.Крылов, В.В.Степанов, И.В.Мещерский, Н.Д.Моисеев, М.Ф.Субботин, Г.Н.Дубошин).

С началом космической эры и бурным развитием косми-

ческих исследований во второй половине XX века возникла новая научная дисциплина *Астродинамика*, изучающая движения искусственных небесных тел методами небесной механики. В отличие от классической небесной механики в астродинамике учитываются силы искусственного происхождения, а также различные силы негравитационной природы.

Прежде всего, это силы тяги ракетных двигателей, аэродинамические силы сопротивления среды, а также силы, возникающие от нецентральной гравитационных полей естественных тел Солнечной системы. Некоторые старые задачи небесной механики получили вторую жизнь в рамках астродинамики, где за короткое время было получено много выдающихся и даже удивительных результатов.

В предлагаемой читателю курсе лекций излагаются основы классической небесной механики. В главе 1 рассматриваются основы теории невозмущенного движения небесных тел, в главе 2 - основы классической теории возмущений. Глава 3 посвящена "ограниченной задаче трех тел", имеющей множество эффективных практических приложений в астрономии и астрофизике. В главе 4 рассматривается общая задача трех тел. Наконец, в главе 5 содержится краткое введение в астродинамику как теорию движения искусственных спутников Земли и теорию межпланетных перелетов космических аппаратов.

Курс небесной механики систематически читается на отделении астрономии физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова и рассчитан не только на астрономов (студентов и аспирантов), но также на специалистов других отраслей точного естествознания.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ</b>	<b>15</b>
1.1	Уравнения движения . . . . .	15
1.1.1	Уравнения абсолютного движения . . . . .	16
1.1.2	Интегралы движения центра масс . . . . .	19
1.1.3	Уравнения относительного движения . . . . .	20
1.1.4	Уравнения барицентрического движения . . . . .	21
1.2	Интегралы относительного движения . . . . .	23
1.2.1	Интегралы площадей . . . . .	23
1.2.2	Интеграл энергии . . . . .	25
1.2.3	Интегралы Лапласа . . . . .	26
1.2.4	Две зависимости между первыми интегралами . . . . .	27
1.2.5	Интеграл, зависящий явно от времени . . . . .	28
1.2.6	Общий интеграл относительного движения . . . . .	29
1.3	Траектория движения (орбита) . . . . .	30
1.3.1	Уравнения орбиты в относительных координатах . . . . .	31
1.3.2	Орбитальная система координат . . . . .	34
1.3.3	Кеплеровские элементы орбиты . . . . .	36
1.4	Общее решение . . . . .	40
1.4.1	Общее решение в орбитальных координатах . . . . .	40
1.4.2	Общее решение уравнений относительного движения . . . . .	43
1.4.3	Уравнение Бине . . . . .	44

1.5	Общее решение уравнений абсолютного движения . . . . .	46
1.5.1	Первые интегралы уравнений абсолютного движения . . . . .	47
1.5.2	Связь постоянных интегрирования уравнений абсолютного и относительного движений . . . . .	49
1.5.3	Общее решение уравнений абсолютного движения . . . . .	50
1.6	Типы невозмущенного движения . . . . .	52
1.6.1	Определение типа орбиты . . . . .	52
1.6.2	Круговое движение . . . . .	53
1.6.3	Эллиптическое движение . . . . .	54
1.6.4	Гиперболическое движение . . . . .	61
1.6.5	Параболическое движение . . . . .	67
1.6.6	Прямолинейное движение . . . . .	70
1.7	Вычисление эфемерид . . . . .	73
1.8	Ряды эллиптического движения . . . . .	75
1.8.1	Тригонометрические ряды . . . . .	76
1.8.2	Ряды по степеням эксцентриситета . . . . .	80
1.8.3	Ряды по степеням средней аномалии . . . . .	96
1.8.4	Замечание о регуляризации . . . . .	105
1.9	Неравенство Зундмана . . . . .	108
1.10	Задача двух тел с переменными массами . . . . .	111
<b>2</b>	<b>ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ</b>	<b>115</b>
2.1	Уравнения абсолютного движения . . . . .	115
2.2	Десять классических интегралов . . . . .	117
2.2.1	Интегралы движения центра масс . . . . .	117
2.2.2	Интегралы площадей . . . . .	119
2.2.3	Интеграл энергии . . . . .	120
2.3	Уравнения барицентрического движения . . . . .	121
2.4	Уравнение Лагранжа-Якоби . . . . .	124
2.5	Теорема о вириале . . . . .	127
2.6	Неравенство Зундмана . . . . .	131
2.7	Уравнения относительного движения . . . . .	132
2.8	Уравнения движения в координатах Якоби . . . . .	135

2.9	Уравнения движения в оскулирующих элементах . . . . .	137
2.9.1	Определение оскулирующих элементов . . . . .	137
2.9.2	Основная операция . . . . .	138
2.9.3	Вывод дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах . . . . .	141
2.9.4	Метод вариации произвольных постоянных для канонических систем . . . . .	161
2.9.5	Элементы Якоби . . . . .	163
2.9.6	Уравнения Лагранжа . . . . .	169
2.10	Приближенное решение уравнений движения . . . . .	171
2.10.1	Аналитическая структура решений . . . . .	173
2.11	Теоремы Лапласа . . . . .	176
2.11.1	Теорема Лапласа о возмущениях больших полуосей . . . . .	176
2.11.2	Теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы . . . . .	177
<b>3</b>	<b>ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ</b>	<b>181</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	181
3.2	Ограниченная круговая задача трех тел . . . . .	182
3.2.1	Уравнения движения . . . . .	183
3.2.2	Интеграл Якоби . . . . .	185
3.2.3	Точки либрации . . . . .	186
3.2.4	Поверхности Хилла . . . . .	191
3.2.5	Использование относительной системы координат . . . . .	201
3.2.6	О симметрии задачи . . . . .	204
3.3	Ограниченная эллиптическая задача трех тел . . . . .	205
3.3.1	Уравнения движения . . . . .	206
3.3.2	Точки либрации . . . . .	207
3.3.3	О законе сохранения энергии . . . . .	208
3.3.4	Поверхности минимальной энергии . . . . .	213
3.3.5	Особые точки поверхности минимальной энергии . . . . .	215

3.3.6	Построение поверхностей минимальной энергии . . . . .	216
3.3.7	Некоторые астрономические приложения поверхностей минимальной энергии	223
<b>4</b>	<b>ОБЩАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ</b>	<b>227</b>
4.1	Уравнения движения и строгие частные решения	227
4.2	Поверхности Зундмана . . . . .	234
<b>5</b>	<b>ВВЕДЕНИЕ В АСТРОДИНАМИКУ</b>	<b>259</b>
5.1	Импульсные маневры космических аппаратов .	259
5.2	Нецентральность поля тяготения . . . . .	265
5.3	Сопротивление атмосферы . . . . .	267
.1	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ . .	273

# Глава 1

## НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

### 1.1 Уравнения движения

*Задачей двух тел* называется задача об определении движения двух материальных точек, взаимодействующих по ньютонову закону всемирного тяготения. Эта механическая модель определяет невозмущенное движение небесных тел, в котором учитываются только силы взаимного притяжения тел и не учитываются никакие другие (возмущающие) силы. Поэтому названия задача о "невозмущенном движении" и "задача двух тел" означают одно и то же.

Задача двух тел имеет фундаментальное значение в небесной механике. Во-первых, потому что для многих астрономических задач силы взаимного притяжения являются доминирующими, значительно превосходящими все другие. И, во-вторых, решение задачи двух тел широко используется в качестве первого приближения при определении возмущенного движения тел, когда принимаются во внимание другие силы.

В Солнечной системе, как правило, взаимные расстояния между телами (планетами) значительно превосходят их линейные размеры. Поэтому оправдана аппроксимация небес-

ных тел материальными точками.

### 1.1.1 Уравнения абсолютного движения

Пусть  $M_0$  и  $M$  - рассматриваемые тела, а  $m_0$  и  $m$  - их массы. Будем считать, что через  $M_0$  обозначено тело с большей массой, так что  $m_0 \geq m$ .

Введем абсолютную систему декартовых координат  $OXYZ$  с началом в произвольной неподвижной точке  $O$  и с неизменными направлениями осей. Координаты тел и их радиус-векторы запишем в виде:

$$M_0 = (X_0, Y_0, Z_0), \quad M = (X, Y, Z), \quad (1.1)$$

$$\vec{\rho}_0 = \{X_0, Y_0, Z_0\}, \quad \vec{\rho} = \{X, Y, Z\}. \quad (1.2)$$

Силы ньютоновского притяжения, действующие на оба тела, равны по величине и противоположно направлены. На тело  $M_0$  действует сила  $\vec{F}_0$ , а на тело  $M$  - сила  $\vec{F}$ :

$$\vec{F}_0 = f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{F} = -f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r}, \quad (1.3)$$

где

$$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0, \quad r = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}, \quad (1.4)$$

а  $f$  - универсальная гравитационная постоянная.

Дифференциальные уравнения движения тел представим в виде системы двух векторных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\vec{\rho}}_0 &= f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r}, \\ m \ddot{\vec{\rho}} &= -f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где точки над величинами обозначают их производные по времени  $t$ .

Уравнения движения в скалярной форме представляются в виде

$$\begin{aligned} m_0\ddot{X}_0 &= \frac{fm_0m}{r^3}(X - X_0), & m\ddot{X} &= -\frac{fm_0m}{r^3}(X - X_0), \\ m_0\ddot{Y}_0 &= \frac{fm_0m}{r^3}(Y - Y_0), & m\ddot{Y} &= -\frac{fm_0m}{r^3}(Y - Y_0), \\ m_0\ddot{Z}_0 &= \frac{fm_0m}{r^3}(Z - Z_0), & m\ddot{Z} &= -\frac{fm_0m}{r^3}(Z - Z_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если ввести в рассмотрение силовую функцию

$$U = U(X_0, Y_0, Z_0, X, Y, Z) = \frac{fm_0m}{r}, \quad (1.7)$$

с помощью которой силы притяжения можно определить формулами

$$\vec{F}_0 = \text{grad}_{\vec{\rho}_0} U = \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_0}, \quad \vec{F} = \text{grad}_{\vec{\rho}} U = \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}}, \quad (1.8)$$

то уравнения (1.5) и (1.6) переищутся в виде

$$m_0\ddot{\rho}_0 = \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_0}, \quad m\ddot{\rho} = \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} m_0\ddot{X}_0 &= \frac{\partial U}{\partial X_0}, & m\ddot{X} &= \frac{\partial U}{\partial X}, \\ m_0\ddot{Y}_0 &= \frac{\partial U}{\partial Y_0}, & m\ddot{Y} &= \frac{\partial U}{\partial Y}, \\ m_0\ddot{Z}_0 &= \frac{\partial U}{\partial Z_0}, & m\ddot{Z} &= \frac{\partial U}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Потенциальная энергия притяжения двойной системы небесных тел определяется равенством:

$$\Pi = -U. \quad (1.11)$$

Скалярная функция  $\varphi(\vec{r}) = -fm_0/r$ , представляет собой энергетическую характеристику гравитационного поля



Согласно теореме о неявных функциях с учетом неравенства (1.16) систему уравнений (1.15) всегда можно разрешить относительно координат и скоростей  $X_0, Y_0, \dots, \dot{Z}$  и в результате из общего интеграла получить общее решение (1.13). Поэтому отыскание общего решения или общего интеграла суть задачи математически эквивалентные.

Каждый первый интеграл предоставляет определенную информацию о движениях тел. Поэтому сначала займемся построением общего интеграла в задаче двух тел.

### 1.1.2 Интегралы движения центра масс

Складывая уравнения движения (1.5) почленно, получим соотношение

$$m_0 \ddot{\vec{\rho}}_0 + m \ddot{\vec{\rho}} = 0, \quad (1.17)$$

которое является следствием замкнутости механической системы. Интегрируя это соотношение один, а затем второй раз получим

$$m_0 \dot{\vec{\rho}}_0 + m \dot{\vec{\rho}} = \vec{a}, \quad (1.18)$$

и

$$m_0 \vec{\rho}_0 + m \vec{\rho} = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (1.19)$$

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - векторные произвольные постоянные, имеющие компоненты

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{a_1, a_2, a_3\}, \\ \vec{b} &= \{b_1, b_2, b_3\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Мы получили шесть скалярных независимых первых интегралов (1.18) и (1.19).

Если рассмотреть центр масс  $G = (X_G, Y_G, Z_G)$  системы двух тел, его радиус-вектор  $\vec{\rho}_G = \{X_G, Y_G, Z_G\}$ , скорость движения  $\vec{W}_G = \dot{\vec{\rho}}_G = \{\dot{X}_G, \dot{Y}_G, \dot{Z}_G\}$  и их связь с координатами и скоростями движения тел

$$\vec{\rho}_G = \frac{m_0 \vec{\rho}_0 + m \vec{\rho}}{m_0 + m}, \quad \dot{\vec{\rho}}_G = \frac{m_0 \dot{\vec{\rho}}_0 + m \dot{\vec{\rho}}}{m_0 + m}, \quad (1.21)$$

то интегралы (1.18) и (1.19) можно представить в виде

$$m_0 \vec{W}_0 + m \vec{W} = (m_0 + m) \vec{W}_G = \vec{a}, \quad (1.22)$$

$$m_0 \vec{\rho}_0 + m \vec{\rho} = (m_0 + m) \vec{\rho}_G = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (1.23)$$

где  $\vec{W}_0 = \dot{\vec{\rho}}_0$ ,  $\vec{W} = \dot{\vec{\rho}}$  и  $\vec{W}_G$  - скорости движущихся тел  $M_0$ ,  $M$  и барицентра  $G$ .

Интеграл (1.22) определяет закон сохранения количества движения системы тел или закон сохранения скорости движения центра масс, а (1.23) - закон равномерного прямолинейного движения центра масс в пространстве.

Всю совокупность интегралов (1.18) и (1.19) называют *интегралами движения центра масс*.

Если векторные произвольные постоянные  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны нулю, то это означает, что в качестве начала координат  $O$  выбран неподвижный центр масс системы  $G$ . Вид уравнений движения не изменится даже при переносе начала в движущийся с произвольной, но постоянной скоростью центр масс (или какую-то другую точку), так как такая система отсчета будет инерциальной.

### 1.1.3 Уравнения относительного движения

Сделаем переход от абсолютной системы координат  $OXYZ$  к относительной системе  $M_0xyz$  по формулам:

$$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0 \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x &= X - X_0, \\ y &= Y - Y_0, \\ z &= Z - Z_0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Преобразование (1.24) представляет собой перенос начала координат  $O$  в точку  $M_0$  при сохранении направления осей координат. Новая система координат не является инерциальной, так как начало координат  $M_0$  движется с ускорением.

Вычитая первое уравнение в (1.5) из второго после предварительного сокращения первого на  $m_0$ , а второго - на  $m$ , получим уравнения относительного движения в виде

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{f(m_0 + m)}{r^3} \vec{r}, \quad (1.25)$$

где

$$\vec{r} = \{x, y, z\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.26)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что знание одного первого интеграла дает возможность понизить порядок системы дифференциальных уравнений на одну единицу.

Поэтому переход от уравнений (1.5) к уравнению (1.25) можно рассматривать как понижение порядка системы дифференциальных уравнений на шесть единиц с помощью интегралов движения центра масс (1.18) и (1.19).

#### 1.1.4 Уравнения барицентрического движения

Положение движущихся тел  $M_0$  и  $M$  можно характеризовать барицентрическими векторами  $\vec{s}_0$  и  $\vec{s}$ , связанными с  $\vec{\rho}_0$  и  $\vec{\rho}$  зависимостями:

$$\vec{s}_0 = \vec{\rho}_0 - \vec{\rho}_G, \quad \vec{s} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_G, \quad (1.27)$$

где  $\vec{\rho}_G$  - радиус-вектор центра масс в абсолютной системе координат (1.21).

Решая систему двух векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{s} - \vec{s}_0 &= \vec{r}, \\ m\vec{s} + m_0\vec{s}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

получим выражения для  $\vec{s}_0$  и  $\vec{s}$  через  $\vec{r}$  в виде

$$\vec{s}_0 = -\frac{m}{m_0 + m} \vec{r}, \quad \vec{s} = \frac{m_0}{m_0 + m} \vec{r}. \quad (1.29)$$

Используя формулы (1.25) и (1.29), получим дифференциальные уравнения барицентрического движения двух тел в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{s}}_0 &= -\frac{fm^3}{(m_0+m)^2s_0^3}\vec{s}_0, \\ \ddot{\vec{s}} &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m)^2s^3}\vec{s},\end{aligned}\tag{1.30}$$

где  $s_0 = |\vec{s}_0|$  и  $s = |\vec{s}|$ .

В отличие от уравнений (1.5) систему (1.30) можно решать отдельно для каждого тела, то есть система 12-го порядка (1.30) расщепляется на две системы 6-го порядка для тел  $M_0$  и  $M$  соответственно.

Из сравнения уравнений (1.25) и (1.30) видно, что они имеют одинаковую структуру: правые; части отличаются только постоянным множителем.

Аналогичную структуру имеют уравнения (1.25) движения тела  $M$  относительно неподвижного тела  $M_0$ . Эту задачу можно также рассматривать как *ограниченную задачу двух тел* в отличие от изложенной выше *общей задачи*. Под термином "ограниченная" понимают задачу, на параметры которой наложено некоторое ограничение. В данном случае таким ограничением является условие  $m_0 \gg m$ . С физической точки зрения это означает, что одинаковые по абсолютной величине силы взаимного притяжения тел могут создавать сколь угодно большие ускорения в движении малого тела  $M$  и ничтожные воздействия на тело  $M_0$ . Примером, иллюстрирующим такую задачу, является движение искусственного спутника в поле притяжения неподвижной Земли. Ограниченная задача двух тел или *задача одного неподвижного центра* называется также *задачей Кеплера*.

Уравнения движения в поле неподвижного притягивающего центра получаются из уравнений относительного движения (1.25) при условии  $m/m_0 \rightarrow 0$ :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{fm_0}{r^3}\vec{r}.\tag{1.31}$$

Все перечисленные задачи математически эквивалентны и описываются системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \quad (1.32)$$

где величина  $\mu$ , именуемая гравитационным параметром системы, принимает значения:

$$\mu = \begin{cases} f(m_0 + m) & \text{— движение тела } M \text{ относит. } M_0, \\ f \frac{m^3}{(m_0 + m)^2} & \text{— барицентрическое движ. тела } M_0, \\ f \frac{m_0^3}{(m_0 + m)^2} & \text{— барицентрическое движ. тела } M, \\ fm_0 & \text{— движ. в поле неподв. притягив. центра (задача Кеплера).} \end{cases}$$

В дальнейшем, в основном, будем ориентироваться на уравнения относительного движения, поскольку эти уравнения чаще всего используются при изучении движений в системах звезда-звезда, Солнце-планета, планета-спутник и пр.

Далее построим общий интеграл уравнений относительного движения (1.32) как совокупность шести независимых первых интегралов этих уравнений.

## 1.2 Интегралы уравнений относительного движения

Векторное уравнение (1.32) эквивалентно системе шести скалярных дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому для получения общего интеграла этих уравнений необходимо определить шесть независимых (скалярных) первых интегралов.

### 1.2.1 Интегралы площадей

Умножим уравнение (1.32) векторно слева на  $\vec{r}$ . Тогда ввиду центральности поля сил в правой части получим

нулевой вектор, а левую часть можно представить в виде производной по времени:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0. \quad (1.33)$$

Интегрируя это уравнение, получим векторную формулу *интегралов площадей*

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} \quad \text{или} \quad \vec{r} \times \vec{V} = \vec{c}, \quad (1.34)$$

где  $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$  - векторная произвольная постоянная, именуемая *постоянной площадей*, а  $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ . В скалярном виде интегралы площадей представляются:

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Свое название интегралы получили в связи с тем, что левая часть равенства (1.34) представляет неизменную удвоенную секторную скорость. В теоретической механике эти интегралы называют *интегралами момента количества движения* или *интегралами кинетического момента*.

Каждый первый интеграл уравнений движения определяет некоторую поверхность в шестимерном гиперпространстве координат  $x, y, z$  и скоростей  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ . Иногда, как в нашем случае, с помощью преобразований из этого интеграла удается получить уравнение поверхности в трехмерном пространстве координат  $x, y, z$ . Действительно, умножая (1.34) скалярно на  $\vec{r}$  или  $\vec{V}$ , получим соответственно

$$\vec{r}\vec{c} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{V}\vec{c} = 0. \quad (1.36)$$

Отсюда устанавливаем, что векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{V}$  всегда остаются ортогональными неизменному вектору  $\vec{c}$ . А это означает, что тело  $M$  в процессе движения всегда располагается в неизменной плоскости, проходящей через начало координат  $M_0$ . Уравнение плоскости можно записать в виде

$$\vec{c}\vec{r} = c_1x + c_2y + c_3z = 0. \quad (1.37)$$

Эту плоскость называют *плоскостью орбиты*.

### 1.2.2 Интеграл энергии

Для вывода интеграла энергии умножим уравнение (1.32) скалярно на вектор  $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$

$$\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \dot{\vec{r}}\vec{r}. \quad (1.38)$$

Учитывая соотношение  $r\dot{r} = \vec{r}\dot{\vec{r}}$ , получающееся дифференцированием равенства  $r^2 = \vec{r}^2$ , представим левую и правую части уравнения (1.38) в виде полных производных:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right). \quad (1.39)$$

Интегрируя это уравнение, получаем *интеграл энергии* в виде

$$\dot{\vec{r}}^2 = V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (1.40)$$

где  $h$  - *постоянная энергии*. В терминологии XVIII века этот интеграл назывался интегралом *живой силы* (совпадающей с удвоенной кинетической энергией). Системы с сохранением механической энергии называются *консервативными*.

Так как для действительных движений всегда выполняется неравенство  $V^2 \geq 0$ , то из интеграла энергии получим *область возможности движений* тела  $M$  в виде неравенства

$$\frac{2\mu}{r} + h \geq 0. \quad (1.41)$$

Из (1.41) видно, что при неотрицательном значении постоянной энергии  $h \geq 0$  движение тела  $M$  ничем не ограничено и, следовательно, может происходить во всем пространстве. Если же  $h < 0$ , то движение может происходить только внутри области, ограниченной сферой:

$$r \leq -\frac{2\mu}{h}. \quad (1.42)$$

Сферу, ограничивающую область возможности движения (1.42), называют *поверхностью нулевой скорости*. Движущееся тело может находиться на этой сфере только с нулевой мгновенной скоростью. В любую точку этой сферы тело может попасть только при прямолинейном радиальном движении, т.е. сфера  $r = -2\mu/h$  является геометрическим местом точек возврата траекторий.

### 1.2.3 Интегралы Лапласа

Умножим уравнение движения (1.32) в виде  $\dot{\vec{V}} = -\mu\vec{r}/r^3$  векторно справа на вектор кинетического момента  $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{V}$

$$\dot{\vec{V}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{c}. \quad (1.43)$$

Используя соотношение

$$\vec{r}\dot{\vec{r}} = \vec{r}\vec{V} = rV \cos \angle(\vec{r}\vec{V}) = r\dot{r}, \quad (1.44)$$

где  $\dot{r} = V \cos \angle(\vec{r}\vec{V})$  - радиальная составляющая скорости  $\vec{V}$ , и формулу для двойного векторного произведения  $\vec{r} \times \vec{c} = \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{V}) = \vec{r}(\vec{r}\vec{V}) - \vec{V}(\vec{r}\vec{r}) = (\vec{r}\dot{r} - \vec{V}r)r$ , левую и правую части равенства (1.43) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{\vec{V}} \times \vec{c} &= \frac{d}{dt}(\vec{V} \times \vec{c}) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{c}) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r}\dot{r} - \vec{V}r)r = \\ &= \mu \frac{\vec{V}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Путем интегрирования полученного равенства

$\frac{d}{dt}(\vec{V} \times \vec{c}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$  определяем *интеграл Лапласа* в векторной

$$\vec{V} \times \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r} = \vec{\lambda} \quad (1.46)$$

или скалярной форме

$$\begin{aligned} c_3 \dot{y} - c_2 \dot{z} - \frac{\mu x}{r} &= \lambda_1, \\ c_1 \dot{z} - c_3 \dot{x} - \frac{\mu y}{r} &= \lambda_2, \\ c_2 \dot{x} - c_1 \dot{y} - \frac{\mu z}{r} &= \lambda_3, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где  $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  - векторная постоянная интегрирования или *вектор Лапласа*.

#### 1.2.4 Две зависимости между первыми интегралами

Проведем подсчет общего числа полученных первых интегралов уравнений относительного движения. Такой подсчет удобно провести по скалярным произвольным постоянным. Их получено семь:

$$c_1, c_2, c_3, h, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3. \quad (1.48)$$

Число первых интегралов оказалось больше порядка системы дифференциальных уравнений, который для системы (1.32) равен шести. Это означает, что среди полученных интегралов хотя бы один является следствием остальных. Учитывая, что среди полученных интегралов ни один не содержит время  $t$  явно (а для динамических систем такой интеграл обязательно должен существовать), можно утверждать, что между полученными интегралами имеется, по крайней мере, две зависимости.

В самом деле, между полученными интегралами существуют две зависимости

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} \vec{c} &= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0, \\ \lambda^2 &= \mu^2 + hc^2, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где  $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$ ,  $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ .

Легко убедиться в справедливости этих зависимостей. Действительно, умножая (1.46) скалярно на  $\vec{c}$  и учитывая первую формулу в (1.36), получим первую зависимость в (1.49).

Справедливость второй зависимости устанавливается путем вычисления квадрата вектора Лапласа:

$$\vec{\lambda}^2 = (\vec{V} \times \vec{c})^2 - 2(\vec{V} \times \vec{c}) \frac{\mu}{r} \vec{r} + \frac{\mu^2}{r^2} \vec{r}^2 = V^2 c^2 - \frac{2\mu}{r} c^2 + \mu^2 = hc^2 + \mu^2. \quad (1.50)$$

Здесь были использованы формулы  $(\vec{V} \times \vec{c})\vec{r} = (\vec{r} \times \vec{V})\vec{c} = c^2$ , (1.34) и (1.40).

Никаких других зависимостей между выведенными первыми интегралами не существует. Доказать это непосредственно затруднительно, так как для этого надо вычислить функциональный определитель Якоби пятого порядка (см. далее формулу (1.52)). Однако, как будет показано в дальнейшем, по постоянным площадей, энергии и Лапласа можно однозначно определить пять кеплеровских элементов орбиты - фокальный параметр, эксцентриситет и три угла Эйлера, характеризующих ориентацию орбиты в пространстве, а эти пять элементов по своей геометрической сути являются независимыми. Поэтому мы можем утверждать, что из семи полученных первых интегралов независимыми являются только пять. Для построения общего интеграла уравнений относительного движения остается получить еще один независимый интеграл.

### 1.2.5 Интеграл, зависящий явно от времени

Все семь полученных первых интегралов не зависят явно от времени. Поэтому с их помощью можно получить траекторию движения (орбиту), но нельзя получить закон движения тела  $M$  по этой траектории.

Пять независимых первых интегралов из семи, которые были выведены ранее, запишем в виде

$$F_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 5). \quad (1.51)$$

Ввиду взаимной независимости этих интегралов, не ограничивая общности рассуждений, можно считать отличным от нуля якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_5)}{D(y, z, \dots, \dot{z})} \neq 0. \quad (1.52)$$

Тогда по теореме о неявных функциях можно из системы (1.51) определить пять величин  $y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  в виде функций произвольных постоянных  $C_i$  и абсциссы  $x$

$$y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \parallel x, C_1, C_2, \dots, C_5. \quad (1.53)$$

Выбирая для определенности из пяти функций в (1.53) только одну, например,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_5) \quad (1.54)$$

и интегрируя это равенство, получим последний независимый интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_5)} = t - \tau, \quad (1.55)$$

где  $\tau$  - независимая произвольная постоянная интегрирования.

Неопределенный интеграл в (1.55) всегда сводится к табличному, но конкретный вид недостающего шестого интеграла зависит от типа движения (эллиптического, гиперболического, параболического, прямолинейного) и будет рассмотрен в дальнейшем.

### 1.2.6 Общий интеграл уравнений относительного движения

Таким образом, общий интеграл дифференциальных уравнений относительного движения может быть представ-

лен совокупностью восьми первых интегралов

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{V} &= \vec{c}, & \vec{V} \times \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r} &= \vec{\lambda}, \\ V^2 &= \frac{2\mu}{r} + h, & \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_5)} &= t - \tau, \end{aligned} \quad (1.56)$$

связанных двумя соотношениями (1.49).

Чтобы записать выражения для произвольных постоянных интегрирования через начальные условия уравнений движения, введем обозначения координат и скоростей тела  $M$  в начальный момент времени  $t = t_0$ , а также начальные значения модуля радиуса-вектора  $r$  и скорости  $V$  в виде:  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}$ .

Если в интегралы (1.56) вместо текущих значений координат и скоростей подставить их начальные значения, то получим искомые выражения:

$$\begin{aligned} c_1 &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, & \lambda_1 &= \dot{y}_0 c_3 - \dot{z}_0 c_2 - \frac{\mu x_0}{r_0}, \\ c_2 &= z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0, & \lambda_2 &= \dot{z}_0 c_1 - \dot{x}_0 c_3 - \frac{\mu y_0}{r_0}, \\ c_3 &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0, & \lambda_3 &= \dot{x}_0 c_2 - \dot{y}_0 c_1 - \frac{\mu z_0}{r_0}, \\ h &= V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, & \tau &= t_0 - \left( \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_5)} \right)_0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Восемь произвольных постоянных интегрирования  $c_1, c_2, c_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, h, \tau$  связаны двумя зависимостями (1.49).

### 1.3 Траектория движения (орбита)

Орбиту можно получить как линию пересечения двух поверхностей. Уравнение одной поверхности было получено ранее - это уравнение плоскости орбиты (1.37). Уравнение второй поверхности выведем далее с помощью векторного интеграла Лапласа.

### 1.3.1 Уравнения орбиты в относительных координатах

Умножение интеграла Лапласа (1.46) скалярно на вектор  $\vec{r}$

$$\vec{r}(\vec{V} \times \vec{c}) - \frac{\mu}{r} \vec{r}^2 = \vec{\lambda} \vec{r} \quad (1.58)$$

позволяет получить соотношение, не содержащее скорость. Действительно, осуществляя циклическую перестановку в смешанном произведении векторов и учитывая (1.34), уравнение (1.58) перепишем в виде

$$\vec{\lambda} \vec{r} = c^2 - \mu r. \quad (1.59)$$

Это уравнение в трехмерном пространстве координат определяет некоторую поверхность. Учитывая, что уравнение (1.59) получено из интеграла Лапласа, указанную поверхность будем называть *поверхностью Лапласа*.

Траекторию движения тела тогда можно получить как пересечение поверхности Лапласа (1.59) с плоскостью орбиты (1.36) и представить в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} \vec{r} &= c^2 - \mu r, \\ \vec{c} \vec{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

В орбитальной системе координат  $M_0\xi\eta\zeta$ , т.е. при  $\vec{\lambda} = \{\lambda, 0, 0\}$ ,  $\vec{c} = \{0, 0, c\}$ ,  $\vec{r} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ , уравнения орбиты преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \lambda\xi &= c^2 - \mu \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \\ c\zeta &= 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Из первого уравнения в (1.61) непосредственно видно, что поверхность Лапласа (1.59) является осесимметричной поверхностью второго порядка. Чтобы дать более точную характеристику этой поверхности, а вместе с ней и орбиты, осуществим переход к сферической системе координат  $M_0rvl$  при помощи преобразования:

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v \cos l, \quad \zeta = r \sin v \sin l, \quad (1.62)$$

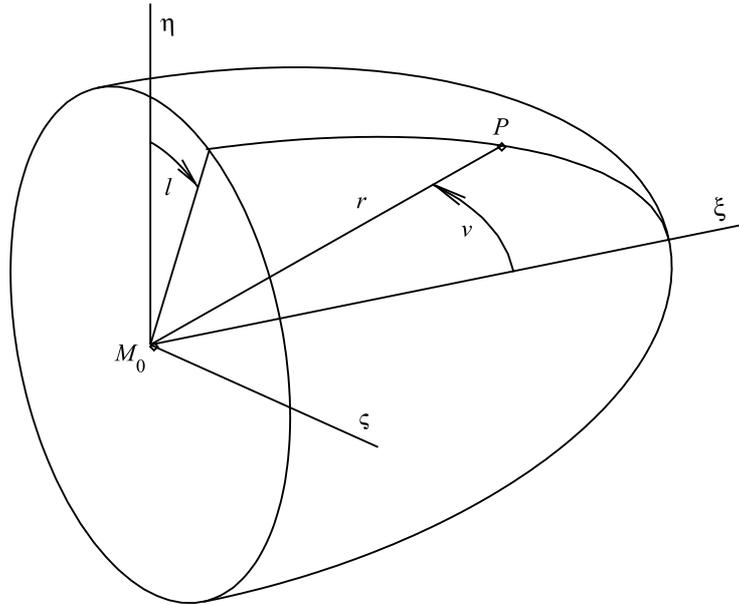


Рис. 1.1. Фрагмент поверхности Лапласа для  $\xi > 0$ . Точка  $P = (\xi, \eta, \zeta) = (r, v, l)$  иллюстрирует текущую точку поверхности в системах координат  $M_0\xi\eta\zeta$  и  $M_0rvl$  соответственно ( $|\overline{M_0P}| = r$ ).

где  $l$  - долгота, отсчитываемая в плоскости  $M_0\eta\zeta$  от оси  $\eta$  в положительном направлении,  $v$  - полярное расстояние, отсчитываемое от оси  $M_0\xi$  (т.е. от вектора  $\vec{\lambda}$ ). В любой плоскости, проходящей через ось  $M_0\xi$ , величину  $v$  можно рассматривать как полярный угол, отсчитываемый от полярной оси  $M_0\xi$ . Общий вид части поверхности Лапласа (для  $\xi \geq 0$ ) показан на рис. 1.1.

Используя формулы (1.62), из (1.61) получим уравнения орбиты в сферической системе координат  $M_0rvl$  в виде

$$\begin{aligned} \lambda r \cos v &= c^2 - \mu r, \\ cr \sin v \sin l &= 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Так как долгота  $l$  не входит в первое уравнение системы (1.63) (уравнение поверхности Лапласа), то можно заключить, что эта поверхность является поверхностью вращения вокруг оси  $M_0\xi$ .

Преобразуем первое уравнение системы (1.63) путем разрешения его относительно  $r$ , а, исключая из рассмотрения прямолинейное движение (т.е. полагая  $c \neq 0$ ,  $r \neq 0$ ,  $v \neq 0$ ), второе уравнение (плоскости орбиты) представим в виде равенства  $l = 0$ . Тогда систему (1.63) можно записать в виде

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos v}, \\ l &= 0, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где введены обозначения

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.65)$$

Таким образом, траекторию в плоскости движения тела можно записать в виде фокального уравнения кривой второго порядка в полярных координатах  $(r, v)$  с полюсом  $M_0$ , расположенным в одном из фокусов:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (1.66)$$

где  $p$  - фокальный параметр кривой,  $e$  - ее эксцентриситет, а  $v$  - полярный угол, отсчитываемый от фокальной оси  $M_0\xi$ . Кривая (1.66) может быть эллипсом, параболой, гиперболой и их вырождениями - отрезками и лучами прямых. Вращением этой кривой вокруг полярной оси  $M_0\xi$  получается поверхность (1.59), которая может оказаться эллипсоидом вращения, параболоидом вращения, двуполостным гиперболоидом вращения, отрезком или лучом прямой.

Полярный угол  $v$  в уравнении орбиты отсчитывается от направления на ближайшую к телу  $M_0$  точку кривой, которое задается вектором  $\vec{\lambda}$ . Этот угол в астрономии называется *истинной аномалией*. Ближайшая точка орбиты называется

*перигеумом*, наиболее удаленная - *апоцентром*. Для реальных небесных тел используются конкретные названия: для Земли - *перигей* и *апогей*, для Солнца - *перигелий* и *афелий*, для Юпитера - *перииовий* и *апоиовий*, для Луны - *периселений* и *апоселений*, для звезды - *периастр* и *апоастр*, для Марса - *перимарсий* и *апомарсий*, для Венеры - *перивенерий* и *аповенерий* и т. п.

Фокальную ось называют также *линией апсид орбиты*, а точки ее пересечения с орбитой - *апсидами*. Апсиды совпадают с вершинами кривой второго порядка.

### 1.3.2 Орбитальная система координат

*Орбитальная* система координат вводится следующим образом. Ось  $M_0\xi$  направим по вектору Лапласа  $\vec{\lambda}$ , ось  $M_0\zeta$  - по вектору  $\vec{c}$ , а ось  $M_0\eta$  - перпендикулярно к этим осям и так, чтобы система  $M_0\xi\eta\zeta$  была правой (см. рис. 1.1 на стр. 32). Плоскость  $\xi\eta$  в орбитальной системе координат является плоскостью орбиты.

Орты орбитальной системы

$$\vec{e}_\tau = \{\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau\}, \quad \vec{e}'_\tau = \{\alpha'_\tau, \beta'_\tau, \gamma'_\tau\}, \quad \vec{e}^* = \{\alpha^*, \beta^*, \gamma^*\} \quad (1.67)$$

полностью определяются компонентами векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{\lambda}$ :

$$\vec{e}_\tau = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}, \quad \vec{e}'_\tau = \vec{e}^* \times \vec{e}_\tau = \frac{\vec{c} \times \vec{\lambda}}{c\lambda}, \quad \vec{e}^* = \frac{\vec{c}}{c}. \quad (1.68)$$

С помощью матрицы  $A$  направляющих косинусов осей орбитальной системы  $M_0\xi\eta\zeta$  относительно системы  $M_0xyz$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_\tau & \alpha'_\tau & \alpha^* \\ \beta_\tau & \beta'_\tau & \beta^* \\ \gamma_\tau & \gamma'_\tau & \gamma^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{c_2\lambda_3 - c_3\lambda_2}{c\lambda} & \frac{c_1}{c} \\ \frac{\lambda_2}{\lambda} & \frac{c_3\lambda_1 - c_1\lambda_3}{c\lambda} & \frac{c_2}{c} \\ \frac{\lambda_3}{\lambda} & \frac{c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1}{c\lambda} & \frac{c_3}{c} \end{vmatrix} \quad (1.69)$$

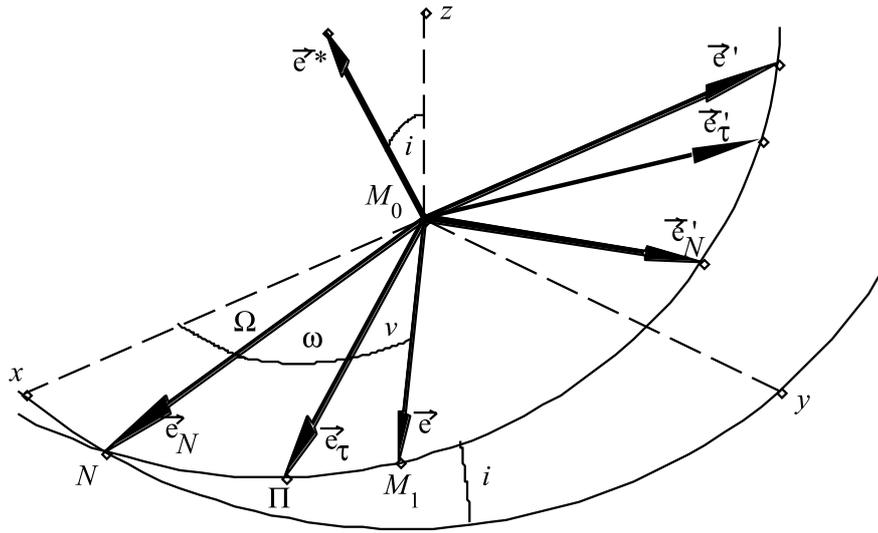


Рис. 1.2. Используемые ортонормированные базисы. Все векторы исходят из начала координат  $M_0$  и заканчиваются на сфере единичного радиуса вокруг  $M_0$ .

можно выразить относительные координаты и скорости через орбитальные:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Обратный переход осуществляется с помощью транспонированной матрицы  $A^T$ , совпадающей с обратной матрицей  $A^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Следует заметить, что все элементы матрицы  $A$  - постоянные величины.

В орбитальной системе координат векторы  $\vec{\lambda}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{r}$  и  $\vec{V}$  имеют следующие компоненты:

$$\vec{\lambda} = \{\lambda, 0, 0\}, \quad \vec{c} = \{0, 0, c\}, \quad \vec{r} = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad \vec{V} = \{\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}\}, \quad (1.72)$$

Радиус-вектор  $\vec{r}$  и векторы скорости в радиальном  $\vec{V}_r$  и трансверсальном направлении  $\vec{V}_n$  будем записывать в виде

$$\vec{r} = r\vec{e}, \quad \vec{V}_r = V_r\vec{e} \quad \vec{V}_n = V_n\vec{e}', \quad (1.73)$$

где  $\vec{e}$  и  $\vec{e}'$  - единичные взаимно ортогональные векторы радиального и трансверсального направлений:

$$\vec{e} = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad \vec{e}' = \{\alpha', \beta', \gamma'\}. \quad (1.74)$$

Направляющие косинусы  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  являются переменными величинами. Верхний индекс (штрих) означает дифференцирование по угловой переменной  $u$  (или по  $v$ , учитывая, что  $u = v + \omega$  и  $\omega = \text{const}$ ), зависящей от времени, что согласуется с правилом дифференцирования единичных векторов.

Переход от ортонормированного базиса  $\vec{e}_\tau, \vec{e}'_\tau, \vec{e}^*$  к базису  $\vec{e}, \vec{e}', \vec{e}^*$  осуществляется поворотом на угол  $v$  вокруг вектора  $\vec{e}^*$ . Можно также рассматривать ортонормированный базис  $\vec{e}_N, \vec{e}'_N, \vec{e}^*$ , в котором единичный вектор  $\vec{e}_N$  направлен из точки  $M_0$  в восходящий узел орбиты  $N$ . Переход от базиса  $\vec{e}_N, \vec{e}'_N, \vec{e}^*$  к базису  $\vec{e}_\tau, \vec{e}'_\tau, \vec{e}^*$  осуществляется поворотом на угол  $\omega$  вокруг вектора  $\vec{e}^*$ . Взаимное расположение этих векторов представлено на рис. 1.2 на стр. 35.

### 1.3.3 Кеплеровские элементы орбиты

Вместо произвольных постоянных  $c_1, c_2, c_3, h, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \tau$  в астрономии обычно используются более наглядные и более удобные постоянные интегрирования, называемые *кеплеровскими элементами орбиты*:  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ .

Два первых кеплеровских элемента,  $p$  - фокальный параметр и  $e$  - эксцентриситет, определяют размер и форму

орбиты. Элемент  $\tau$  означает момент прохождения телом перицентра орбиты. Его называют еще "динамическим моментом", так как это единственный кеплеровский элемент, характеризующий динамику движения по орбите, в отличие от остальных элементов, имеющих геометрический характер.

Все углы будем также изображать дугами на небесной сфере. Прямая, по которой плоскость орбиты пересекается с основной координатной плоскостью  $M_0xy$ , называется *линией узлов*, а точки ее пересечения с небесной сферой - *узлами орбиты*. Узел, при прохождении которого тело перемещается из полупространства  $z < 0$  в полупространство  $z > 0$ , называется *восходящим узлом* орбиты, а противоположный узел - *нисходящим узлом*.

Три угловых элемента  $\Omega$ ,  $i$  и  $\omega$  определяют положение орбиты в пространстве. Угол  $\Omega$  в астрономии называется *долготой восходящего узла*. Он отсчитывается в плоскости  $M_0xy$  от положительного направления оси абсцисс  $M_0x$  до направления на восходящий узел орбиты. Диапазон изменения угла:  $0 \leq \Omega < 2\pi$ .

Угол  $i$  называется *наклоном орбиты* или *наклоном*. Это - двугранный угол между плоскостью  $M_0xy$  и плоскостью орбиты, изменяющийся в диапазоне  $0 \leq i \leq \pi$ .

Угол  $\omega$  между линией узлов и линией аписид называется *угловым расстоянием перицентра от узла* или *аргументом широты перицентра* орбиты. Он измеряется в плоскости орбиты от восходящего узла до направления на перицентр орбиты,  $0 \leq \omega < 2\pi$ .

Углы  $\Omega$ ,  $i$  и  $\omega$  - это фактически хорошо известные из теоретической механики эйлеровы углы прецессии, нутации и собственного вращения, определяющие ориентацию орбитальной системы координат  $M_0\xi\eta\zeta$  относительно осей системы  $M_0xyz$ .

В астрономии углом прецессии служит долгота восходящего узла орбиты  $\Omega$ , углом нутации - наклонение орбиты  $i$ , а углом собственного вращения - аргумент перицентра  $\omega$ . Углы  $i$  и  $\Omega$  определяют положение плоскости орбиты в пространстве, а угол  $\omega$  - ориентацию орбиты в этой плоскости.

Соотношения между произвольными постоянными интегрирования и кеплеровскими элементами  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$  можно получить по формулам сферической тригонометрии из соответствующих сферических треугольников на небесной сфере. Вершины этих треугольников будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие оси. Например, вершинами треугольника  $Nx\zeta$  являются точки небесной сферы, полученные ее пересечением с положительным направлением осей  $Ox$  и  $O\zeta$ , а также с направлением на восходящий узел орбиты  $\overrightarrow{ON}$ . Аналогично строятся другие треугольники, причем вершины соединяются дугами больших кругов.

Рассмотрим сначала упомянутый треугольник  $Nx\zeta$ . Угол при вершине  $N$  у этого треугольника равен  $90^\circ - i$ . Сторона (дуга)  $N\zeta$  равна  $90^\circ$ , сторона  $xN$  равна  $\Omega$ , а сторона  $x\zeta$  есть  $\arccos(c_1/c)$ . По теореме косинусов тогда получим

$$\frac{c_1}{c} = \sin \Omega \sin i. \quad (1.75)$$

Аналогично, используя теорему косинусов, можно получить две формулы из треугольников  $Ny\zeta$  и  $Nz\zeta$  в виде

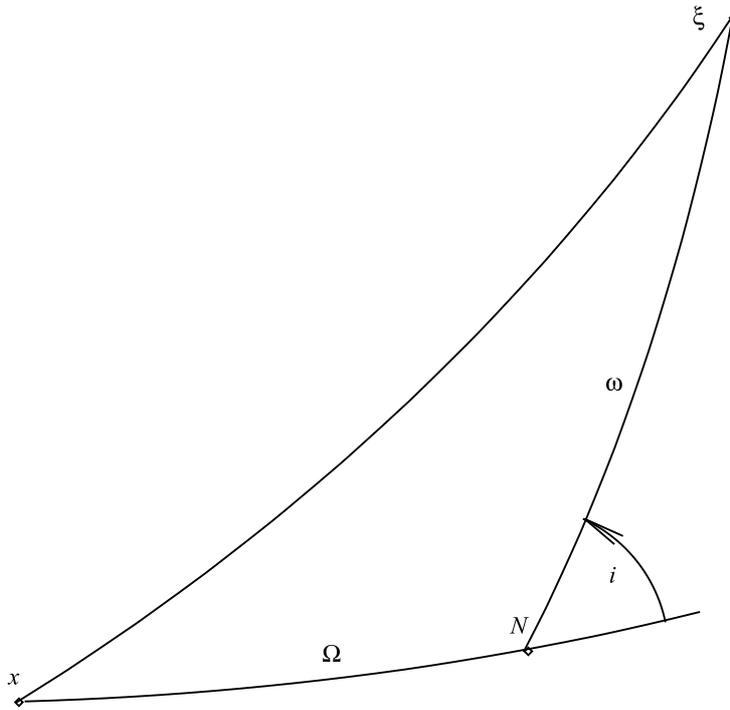
$$\frac{c_2}{c} = -\cos \Omega \sin i, \quad \frac{c_3}{c} = \cos i. \quad (1.76)$$

Рассмотрим теперь треугольник  $Nx\xi$  (см. рис. 1.3). Он характеризуется углом  $180^\circ - i$  при вершине  $N$  и сторонами  $\widehat{xN} = \Omega$ ,  $\widehat{N\xi} = \omega$  и  $\widehat{x\xi} = \arccos(\lambda_1/\lambda)$ . По теореме косинусов  $\cos(\widehat{x\xi}) = \cos \Omega \cos \omega + \sin \Omega \sin \omega \cos(\angle xN\xi)$  из этого треугольника получим

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i. \quad (1.77)$$

Аналогичные формулы можно вывести из треугольников  $Ny\xi$  и  $Nz\xi$ .

Вся совокупность формул, определяющих постоянные ин-

Рис. 1.3. Сферический треугольник  $Nx\xi$ .

тегрирования через кеплеровские элементы, такова:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* &= \frac{c_1}{c} = \sin \Omega \sin i, & \alpha_\tau &= \frac{\lambda_1}{\lambda} = \\
 & & &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\
 \beta^* &= \frac{c_2}{c} = -\cos \Omega \sin i, & \beta_\tau &= \frac{\lambda_2}{\lambda} = \\
 & & &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \\
 \gamma^* &= \frac{c_3}{c} = \cos i, & \gamma_\tau &= \frac{\lambda_3}{\lambda} = \sin \omega \sin i, \\
 c &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{\mu p}, & \lambda &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \mu e, \\
 h &= \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2}, & \tau &= \tau.
 \end{aligned}$$

(1.78)

Последнее равенство в (1.78) означает, что постоянная интегрирования  $\tau$  совпадает с моментом прохождения через перицентр.

С помощью формул (1.78) можно осуществить обратный переход от постоянных интегрирования  $\vec{c}$ ,  $\vec{\lambda}$ ,  $h$ ,  $\tau$  к кеплеровским элементам  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ . Для этого сначала вычисляются  $p$  и  $e$  по формулам (1.65). Затем из равенства  $c_3/c = \cos i$  однозначно определяется наклонение  $i$ . Далее по двум направляющим косинусам  $c_1/c$  и  $c_2/c$  однозначно (с указанием четверти) определяется долгота восходящего узла  $\Omega$ . А по двум направляющим косинусам вектора  $\vec{\lambda}$  также однозначно определяется аргумент перицентра  $\omega$ .

Уравнения (1.78) определяют выражения для направляющих косинусов осей  $O\xi$  и  $O\zeta$  через угловые кеплеровские элементы орбиты  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ . Аналогичные выражения для направляющих косинусов оси  $O\eta$  имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha'_\tau &= \frac{c_2\lambda_3 - c_3\lambda_2}{c\lambda} = -\cos\Omega \sin\omega - \sin\Omega \cos\omega \cos i, \\ \beta'_\tau &= \frac{c_3\lambda_1 - c_1\lambda_3}{c\lambda} = -\sin\Omega \sin\omega + \cos\Omega \cos\omega \cos i, \\ \gamma'_\tau &= \frac{c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1}{c\lambda} = \cos\omega \sin i.\end{aligned}\quad (1.79)$$

## 1.4 Общее решение

Общее решение задачи двух тел можно получить из общего интеграла (1.57), представляющего собой не что иное, как неявную форму задания общего решения.

### 1.4.1 Общее решение в орбитальных координатах

В этом разделе рассматривается движение тела  $M$  в орбитальных прямоугольной  $M_0\xi\eta\zeta$  и цилиндрической  $M_0rv\zeta$  системах координат. Положение орбитальной системы ко-

ординат в пространстве определяется тремя кеплеровскими элементами  $\Omega, i, \omega$ . Долгота восходящего узла  $\Omega$  и наклонение  $i$  определяют положение плоскости орбиты  $M_0\xi\eta$ , а аргумент перицентра  $\omega$  определяет положение оси  $M_0\xi$  в плоскости орбиты. При переходе от относительной системы  $M_0xyz$  к орбитальной системе  $M_0\xi\eta\zeta$  кеплеровские элементы  $\Omega, i, \omega$  считаются известными. Поэтому общее решение в орбитальной системе координат зависит только от трех оставшихся кеплеровских элементов  $p, e, \tau$ , которые можно рассматривать как произвольные постоянные. Это отражено в последующей формуле (1.92), в которой фокальный параметр  $p$ , эксцентриситет  $e$  и время прохождения через перицентр  $\tau$  входят в общее решение для орбитальной системы  $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \zeta = 0, \dot{\zeta} = 0$ , а элементы  $\Omega, i, \omega$  появляются только при переходе к относительной системе координат посредством направляющих косинусов  $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau, \alpha'_\tau, \beta'_\tau, \gamma'_\tau$ .

Задача определения общего решения в орбитальных координатах сводится к получению зависимостей:

$$\begin{aligned} \xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta} &\parallel t, p, e, \tau, & \text{- для прямоугольной системы } M_0\xi\eta\zeta, \\ r, v, \dot{r}, \dot{v} &\parallel t, p, e, \tau, & \text{- для цилиндрической системы } M_0rv\zeta, \end{aligned} \quad (1.80)$$

а аппликата  $\zeta$  и ее производная  $\dot{\zeta}$  тождественно равны нулю.

Уравнение орбиты в полярных координатах (1.66) связывает переменные  $r$  и  $v$ . Для вывода зависимости величин  $r$  и  $v$  от времени рассмотрим интеграл площадей в цилиндрической системе координат. Сначала из (1.35) при  $c_1 = c_2 = 0$  и  $c_3 = c$  с учетом  $\zeta = \dot{\zeta} = 0$  запишем интеграл площадей в орбитальных декартовых координатах в виде

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c, \quad (1.81)$$

а затем путем замены переменных

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v, & \dot{\xi} &= \dot{r} \cos v - r\dot{v} \sin v, \\ \eta &= r \sin v, & \dot{\eta} &= \dot{r} \sin v + r\dot{v} \cos v \end{aligned} \quad (1.82)$$

из (1.81) получим интеграл площадей в цилиндрической системе координат  $M_0 r v \zeta$

$$r^2 \dot{v} = c, \quad (1.83)$$

где  $r$  определяется формулой (1.66).

Интегрируя это равенство, получим зависимость времени  $t$  от истинной аномалии  $v$  в виде

$$J = \int_0^v \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} dv = c(t - \tau), \quad (1.84)$$

где произвольная постоянная  $\tau$  (момент прохождения через перигеум) соответствует значению истинной аномалии  $v = 0$ . Это уравнение мы будем использовать в дальнейшем вместо интеграла (1.55), зависящего явно от времени.

Величину  $\dot{v}$  можно получить из (1.83), а величину  $\dot{r}$  - дифференцированием равенства (1.66)  $r = p/(1 + e \cos v)$ :

$$\dot{v} = \frac{c}{r^2}, \quad \dot{r} = -\frac{p(-e \sin v)\dot{v}}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{ec}{p} \sin v. \quad (1.85)$$

Подставляя полученные значения для  $\dot{v}$  и  $\dot{r}$  в выражения (1.82) для  $\dot{\xi}$  и  $\dot{\eta}$  и учитывая, что зависимость  $t$  от  $v$  задается формулой (1.84), получим общее решение в орбитальной цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{(1 + e \cos v)}, & \dot{r} &= \frac{ec}{p} \sin v, \\ t &= \tau + \frac{1}{c} \int_0^v \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} dv, & \dot{v} &= \frac{c}{p^2} (1 + e \cos v)^2. \end{aligned} \quad (1.86)$$

С учетом (1.86) общее решение в орбитальных прямоугольных координатах будет задаваться формулами (1.82) после обращения интеграла (1.84), т.е. получения зависимости истинной аномалии  $v$  от времени  $t$ .

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости движения тела  $M$  представляются в виде

$$V_r = \dot{r} = \frac{ec}{p} \sin v, \quad V_n = r\dot{v} = \frac{c}{p} (1 + e \cos v), \quad (1.87)$$

а сама скорость записывается в виде:

$$V = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + h} = \frac{c}{p} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}. \quad (1.88)$$

### 1.4.2 Общее решение уравнений относительного движения

Рассмотрим на небесной сфере сферический треугольник  $NMx$ , где  $M$  - проекция текущего положения тела  $M$  на небесную сферу. Сторонами этого треугольника являются дуги больших кругов  $\widehat{xN} = \Omega$ ,  $NM = u = \omega + v$  - аргумент широты тела  $M$ ,  $\widehat{xM} = \arccos(x/r)$ . Угол при вершине  $N$  равен  $180^\circ - i$ . При  $v = 0$  треугольник  $NMx$  преобразуется в треугольник  $Nx\xi$ , изображенный на рис. 1.3 на стр. 39. По теореме косинусов сферической тригонометрии из треугольников  $NMx$ ,  $NMy$  и  $NMz$  получим

$$\begin{aligned} x &= r\alpha = r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i), \\ y &= r\beta = r(\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i), \\ z &= r\gamma = r \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Направляющие косинусы  $\alpha, \beta, \gamma$  радиус-вектора  $\vec{r}$  относительно осей системы  $M_0xyz$  здесь можно получить из (1.78) заменой аргумента перицентра  $\omega$  на аргумент широты  $u$ .

Вычисляя путем дифференцирования по времени  $t$  компоненты скоростей, получим общее решение уравнений относительного движения в виде

$$\begin{aligned} x &= r\alpha, & \dot{x} &= \dot{r}\alpha + r\dot{\alpha}', \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \dot{r}\beta + r\dot{\beta}', \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \dot{r}\gamma + r\dot{\gamma}', \end{aligned} \quad (1.90)$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \cos \Omega \cos u - & \alpha' &= -\cos \Omega \sin u - \\
 & - \sin \Omega \sin u \cos i, & & - \sin \Omega \cos u \cos i, \\
 \beta &= \sin \Omega \cos u + & \beta' &= -\sin \Omega \sin u + \\
 & + \cos \Omega \sin u \cos i, & & + \cos \Omega \cos u \cos i, \\
 \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \cos u \sin i, \\
 u &= \omega + v,
 \end{aligned} \tag{1.91}$$

а штрих означает производную по аргументу широты:

$$(\cdot)' = d(\cdot)/du.$$

К этим соотношениям следует добавить уравнения (1.86).

Общее решение можно вывести другим путем, используя решение в орбитальных координатах. В этом случае направляющие косинусы будут постоянными величинами, что удобно при вычислении координат и скоростей для большого числа моментов времени.

Используя формулы (1.70), общее решение в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha_\tau & \alpha'_\tau \\ \beta_\tau & \beta'_\tau \\ \gamma_\tau & \gamma'_\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi & \dot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{1.92}$$

где величины  $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$  определяют общее решение в орбитальной системе координат по формулам (1.82) и (1.86).

### 1.4.3 Уравнение Бине

Другой способ получения траектории движения в задаче двух тел связан с широко известным уравнением Бине. Это уравнение записывается в цилиндрической системе координат  $M_0 r \varphi \zeta$ , получающейся из рассмотренной ранее системы  $M_0 r v \zeta$  путем поворота вокруг оси  $M_0 \zeta$  на некоторый

угол  $\omega^*$  согласно равенству:

$$\varphi = v + \omega^*. \quad (1.93)$$

Это означает, что направление полярной оси в плоскости  $\zeta = 0$  в системе  $M_0 r \varphi \zeta$  выбирается произвольным, в то время как в системе  $M_0 r v \zeta$  полярная ось всегда направлена на перицентр орбиты.

Используя обозначения

$$\vec{r} = r\vec{e}, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e} + r\dot{\varphi}\vec{e}', \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e} - r\dot{\varphi}^2\vec{e} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}' + r\ddot{\varphi}\vec{e}', \quad (1.94)$$

$$\vec{r} = \{r, 0, 0\}, \quad \dot{\vec{r}} = \{\dot{r}, r\dot{\varphi}, 0\}, \quad \ddot{\vec{r}} = \{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, 0\} \quad (1.95)$$

и известные из теоретической механики проекции ускорения на радиальное, трансверсальное и бинормальное направления

$$\ddot{\vec{r}} = \{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, \ddot{\zeta}\}, \quad (1.96)$$

можно записать дифференциальные уравнения относительного движения тела  $M$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \left\{ -\frac{\mu}{r^2}, 0, 0 \right\} \quad (1.97)$$

в скалярной форме

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0, \quad \ddot{\zeta} = 0. \quad (1.98)$$

Из второго уравнения (1.98) получаем интеграл площадей в виде

$$r^2\dot{\varphi} = c. \quad (1.99)$$

Подставляя  $\dot{\varphi}$  из этого уравнения в первое уравнение (1.98) и делая замену переменных по формулам

$$d\varphi = \frac{c}{r^2} dt, \quad u^* = \frac{1}{r}, \quad \text{то есть} \quad \ddot{r} = -c^2 u^{*2} \frac{d^2 u^*}{d\varphi^2}, \quad (1.100)$$

получим уравнение Бине

$$\frac{d^2 u^*}{d\varphi^2} + u^* = \frac{\mu}{c^2}. \quad (1.101)$$

Уравнение Бине является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$u^* = \frac{\mu}{c^2} + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, \quad (1.102)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные интегрирования.

Вместо постоянных  $C_1$  и  $C_2$  можно ввести величины  $e$  и  $\omega^*$  по формулам

$$C_1 = \frac{e}{p} \cos \omega^*, \quad C_2 = \frac{e}{p} \sin \omega^* \quad (1.103)$$

и с учетом зависимости  $p = c^2/\mu$  записать общее решение в виде

$$u^* = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\varphi - \omega^*). \quad (1.104)$$

Учитывая (1.93), отсюда получим уравнение орбиты в уже известной форме фокального уравнения конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (1.105)$$

где  $v = \varphi - \omega^*$  - истинная аномалия.

## 1.5 Общий интеграл и общее решение уравнений абсолютного движения

В некоторых астрономических задачах для описания движений небесных тел используется абсолютная система координат  $OXYZ$  (см. формулы 1.2). Такие движения рассматриваются в этом разделе.

### 1.5.1 Первые интегралы уравнений абсолютного движения

Кроме шести интегралов движения центра масс (1.18) и (1.19) дифференциальные уравнения (1.9) допускают также существование интегралов момента количества движения, интеграла энергии, интегралов Лапласа и интеграла, содержащего явно время.

Для получения интегралов момента количества движения умножим первое уравнение в системе (1.9) векторно слева на  $\vec{\rho}_0$ , а второе - на  $\vec{\rho}$  и сложим:

$$m_0 \vec{\rho}_0 \times \ddot{\vec{\rho}}_0 + m \vec{\rho} \times \ddot{\vec{\rho}} = \vec{\rho}_0 \times \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_0} + \vec{\rho} \times \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}}. \quad (1.106)$$

В правой части полученного равенства записана сумма моментов сил, действующих на тела. Эта сумма равна нулю, так как силы, действующие на тела, расположены на одной прямой, равны по величине и противоположно направлены. Поэтому, интегрируя уравнение (1.106), получим векторный интеграл момента количества движения (или кинетического момента) в виде

$$m_0 \vec{\rho}_0 \times \dot{\vec{\rho}}_0 + m \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} = \vec{c}_a, \quad (1.107)$$

где  $\vec{c}_a = \{c_{a1}, c_{a2}, c_{a3}\}$  - векторная произвольная постоянная.

Интеграл энергии получим путем скалярного умножения первого уравнения системы (1.5) на  $\dot{\vec{\rho}}_0$ , а второго - на  $\dot{\vec{\rho}}$ , последующего их сложения и интегрирования:

$$m_0 \frac{\dot{\rho}_0^2}{2} + m \frac{\dot{\rho}^2}{2} - f \frac{m_0 m}{r} = h_a, \quad (1.108)$$

где  $h_a$  - постоянная энергии. В левой части уравнения (1.108) стоит полная механическая энергия двойной системы. В отличие от относительного движения при записи интеграла энергии здесь не принято умножать его левую часть на два.

Для вывода интегралов Лапласа умножим векторно справа на  $\vec{c}$  сначала первое уравнение системы (1.5), а затем - второе, и вычитая из второго равенства первое, получим:

$$(m\ddot{\vec{\rho}} - m_0\ddot{\vec{\rho}}_0) \times \vec{c} + 2f \frac{m_0 m}{r^3} (\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \times \vec{c} = 0. \quad (1.109)$$

Учитывая соотношение  $d/dt(\vec{r}/r) = -(\vec{r} \times \vec{c})/r^3$  (см. формулы (1.45)), уравнение (1.109) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{\rho}} - m_0\dot{\vec{\rho}}_0) \times \vec{c} - 2fm_0m \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0. \quad (1.110)$$

Интегрируя, отсюда получим искомые интегралы Лапласа в векторном виде

$$(m\dot{\vec{\rho}} - m_0\dot{\vec{\rho}}_0) \times \vec{c} - 2fm_0m \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\lambda}_a, \quad (1.111)$$

где  $\vec{\lambda}_a$  - векторная постоянная Лапласа в абсолютном движении.

Интеграл, содержащий явно время, можно записать в виде, аналогичном (1.55):

$$\int \frac{d(\xi - \xi_0)}{\varphi(\xi - \xi_0)} = t - \tau, \quad (1.112)$$

где  $\varphi$  - некоторая функция разности абсцисс  $(\xi - \xi_0)$ .

Полученные интегралы (1.107), (1.108), (1.111) и (1.112) вместе с интегралами центра масс (1.18)  $m_0\dot{\vec{\rho}}_0 + m\dot{\vec{\rho}} = \vec{a}$  и (1.19)  $m_0\vec{\rho}_0 + m\vec{\rho} = \vec{a}t + \vec{b}$  определяют общий интеграл уравнений абсолютного движения. Между этими интегралами также существуют две зависимости. Их можно получить из выведенных ранее соотношений (1.49), если знать зависимости между постоянными интегрирования в абсолютном и относительном движении, которые приведены ниже.

### 1.5.2 Связь постоянных интегрирования уравнений абсолютного и относительного движений

Между произвольными постоянными абсолютного и относительного движений существуют следующие зависимости

$$\begin{aligned}(m_0 + m)\vec{c}_a &= m_0 m \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a}, \\ 2(m_0 + m)h_a &= m_0 m h + \vec{a}^2, \\ (m_0 + m)\vec{\lambda}_a &= 2m_0 m \vec{\lambda} - (m_0 - m)\vec{a} \times \vec{c}.\end{aligned}\quad (1.113)$$

Для доказательства справедливости этих зависимостей в них нужно подставить выражения для постоянных интегрирования в абсолютном и относительном движении через координаты и скорости.

Если в первое уравнение в системе (1.113) вместо  $\vec{c}$  и  $\vec{c}_a$  подставить

$$\vec{c} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = (\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \times (\dot{\vec{\rho}} - \dot{\vec{\rho}}_0) \quad \text{и} \quad \vec{c}_a = m_0 \vec{\rho}_0 \times \dot{\vec{\rho}}_0 + m \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}, \quad (1.114)$$

то получим

$$\begin{aligned}(m_0 + m)\vec{c}_a - m_0 m \vec{c} &= m_0^2 \vec{\rho}_0 \times \dot{\vec{\rho}}_0 + m_0 m \vec{\rho}_0 \times \dot{\vec{\rho}} + \\ &+ m_0 m \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}_0 + m^2 \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} = (m_0 \vec{\rho}_0 + m \vec{\rho}) \times (m_0 \dot{\vec{\rho}}_0 + m \dot{\vec{\rho}}) \equiv \\ &\equiv (\vec{a}t + \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a},\end{aligned}\quad (1.115)$$

что доказывает справедливость первого из уравнений (1.113).

Если далее воспользоваться выражениями для интегралов энергии в виде

$$\begin{aligned}h &= V^2 - 2f \frac{m_0 + m}{r} = \dot{\vec{\rho}}_0^2 - 2\dot{\vec{\rho}}_0 \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{\rho}}^2 - 2f \frac{m_0 + m}{r}; \\ h_a &= m_0 \frac{\dot{\vec{\rho}}_0^2}{2} + m \frac{\dot{\vec{\rho}}^2}{2} - f \frac{m_0 m}{r},\end{aligned}\quad (1.116)$$

то после приведения подобных членов второе уравнение в (1.113) можно записать в форме

$$2(m_0 + m)h_a - m_0 m h = (m_0^2 \dot{\rho}_0^2 + m_0 m \dot{\rho}_0^2 + m_0 m \dot{\rho}^2 + m^2 \dot{\rho}^2) - \\ - m_0 m (\dot{\rho}_0^2 - 2\dot{\rho}_0 \dot{\rho} + \dot{\rho}^2) = (m_0^2 \dot{\rho}_0^2 + m^2 \dot{\rho}^2) \equiv \vec{a}^2. \quad (1.117)$$

Этим устанавливается справедливость второго соотношения из (1.113).

Для доказательства третьего уравнения из зависимостей (1.113) воспользуемся соотношениями

$$\vec{\lambda} = (\dot{\rho} - \dot{\rho}_0) \times \vec{c} - f(m_0 + m) \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\lambda}_a = (m \dot{\rho} - m_0 \dot{\rho}_0) \times \vec{c} - 2f m_0 m \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.118)$$

и преобразуем выражение  $(m_0 + m)\vec{\lambda}_a - 2m_0 m \vec{\lambda}$ :

$$(m_0 + m)\vec{\lambda}_a - 2m_0 m \vec{\lambda} = (m_0 + m)(m \dot{\rho} - m_0 \dot{\rho}_0) \times \vec{c} - \\ - 2m_0 m (\dot{\rho} - \dot{\rho}_0) \times \vec{c} = \\ = [(m_0 m \dot{\rho} - m_0^2 \dot{\rho}_0 + m^2 \dot{\rho} - m_0 m \dot{\rho}_0) - (2m_0 m \dot{\rho} - 2m_0 m \dot{\rho}_0)] \times \\ \times \vec{c} = [m(m - m_0)\dot{\rho} + m_0(m - m_0)\dot{\rho}_0] \times \vec{c} = \\ = (m - m_0)(m_0 \dot{\rho}_0 + m \dot{\rho}) \times \vec{c} = (m - m_0)\vec{a} \times \vec{c}. \quad (1.119)$$

Таким образом, все зависимости (1.113) доказаны. Для барицентрической системы координат эти зависимости упрощаются, так как в этом случае  $\vec{a} = \vec{b} = 0$ .

### 1.5.3 Общее решение уравнений абсолютного движения

Если определено общее решение векторного уравнения относительного движения (1.25), то общее решение уравнений абсолютного движения (1.5) можно получить без процедуры интегрирования. Для этого, используя уравнения

(1.18), (1.19), (1.24), запишем две системы линейных уравнений отдельно для координат и скоростей

$$\begin{aligned} \vec{\rho} - \vec{\rho}_0 &= \vec{r}, & \dot{\vec{\rho}} - \dot{\vec{\rho}}_0 &= \dot{\vec{r}}, \\ m\vec{\rho} + m_0\vec{\rho}_0 &= \vec{a}t + \vec{b}, & m\dot{\vec{\rho}} + m_0\dot{\vec{\rho}}_0 &= \vec{a} \end{aligned} \quad (1.120)$$

с одинаковым определителем систем  $\Delta = m_0 + m \neq 0$ .

Решая эту систему, получим общее решение абсолютного движения в виде четырех векторных (12-ти скалярных) уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_0 &= -\frac{m}{m_0 + m}\vec{r} + \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_0 + m}, & \dot{\vec{\rho}}_0 &= -\frac{m}{m_0 + m}\dot{\vec{r}} + \frac{\vec{a}}{m_0 + m}, \\ \vec{\rho} &= \frac{m_0}{m_0 + m}\vec{r} + \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_0 + m}, & \dot{\vec{\rho}} &= \frac{m_0}{m_0 + m}\dot{\vec{r}} + \frac{\vec{a}}{m_0 + m}, \end{aligned} \quad (1.121)$$

где компоненты векторов  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  определяются формулами (1.90) или (1.92).

Это общее решение определяет координаты и скорости тел  $M_0$  и  $M$  в зависимости от времени и 12 произвольных постоянных

$$\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \dot{\vec{\rho}}_0, \dot{\vec{\rho}} || t, \vec{a}, \vec{b}, p, e, i, \Omega, \omega, \tau, \quad (1.122)$$

где векторные постоянные интегралов движения центра масс  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  входят в уравнения (1.121) явно, а кеплеровские элементы - неявно, посредством выражений для  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$ .

Движения тел  $M_0$  и  $M$  происходят по коническим сечениям, геометрически подобным коническому сечению в относительном движении. Коэффициенты подобия устанавливаются согласно уравнениям барицентрического движения (1.30). Эксцентриситеты орбит тел  $M_0$  и  $M$  всегда одинаковы. Линия, соединяющая тела всегда проходит через их общий центр масс. Значение истинной аномалии  $v$  у тел также всегда одинаковое, но отсчет истинной аномалии ведется от диаметрально противоположных направлений. По известным барицентрическим движениям тел легко построить относительное движение, используя зависимость  $\vec{r} = \vec{s} - \vec{s}_0$ .

## 1.6 Типы невозмущенного движения

Результаты проведенного интегрирования позволяют сформулировать два первых обобщенных закона Кеплера.

Первый закон: невозмущенной орбитой является кривая второго порядка, в одном из фокусов которой расположено притягивающее тело.

Второй закон: площадь, ометаемая радиусом-вектором движущегося тела, изменяется пропорционально времени.

Формулировку третьего закона рассмотрим далее для эллиптического движения.

### 1.6.1 Определение типа орбиты

Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение (1.66) в зависимости от эксцентриситета  $e$  и фокального параметра  $p$  определяет следующие типы орбит:

$p \neq 0$	$e = 0,$	- окружность,
$p \neq 0$	$0 < e < 1,$	- эллипс,
$p \neq 0$	$e = 1,$	- парабола,
$p \neq 0$	$1 < e < \infty,$	- гипербола,
$p = 0$	$e = 1,$	- прямая.

Учитывая зависимости  $c^2 = \mu p$ ,  $e = \lambda/\mu$  и  $\lambda^2 = \mu^2 + hc^2$ , тип орбиты можно установить по произвольным постоянным интегрирования  $c$  и  $h$ :

$c \neq 0,$	$h = -\frac{\mu^2}{c^2},$	- окружность,
$c \neq 0,$	$h < 0,$	- эллипс,
$c \neq 0,$	$h = 0,$	- парабола,
$c \neq 0,$	$h > 0,$	- гипербола,
$c = 0,$	$h$ — любая,	- прямая.

Тип орбиты можно также определить по начальным условиям  $V_0$ ,  $r_0$  и начальному углу  $\delta_0$  между векторами  $\vec{V}_0$  и  $\vec{r}_0$ , учитывая, что  $h = V_0^2 - 2\mu/r_0$  и  $c = r_0 V_0 \sin \delta_0$ :

$$\begin{array}{lll}
\sin \delta_0 = 1, & V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, & \text{- окружность,} \\
\sin \delta_0 \neq 0, & V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, & \text{- эллипс,} \\
\sin \delta_0 \neq 0, & V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, & \text{- парабола,} \\
\sin \delta_0 \neq 0, & V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, & \text{- гипербола,} \\
\sin \delta_0 = 0, & V_0 \text{ — любая,} & \text{- прямая.}
\end{array}$$

Скорость, определяемая по формуле  $V = \sqrt{\mu/r}$ , называется *первой космической* или *круговой* скоростью. Такой скоростью обладает тело  $M$  при движении по круговой орбите радиуса  $r$ . Скорость  $V = \sqrt{2\mu/r}$  называется *второй космической*, *параболической* или скоростью *освобождения*. Тело, обладающее такой скоростью, при  $t \rightarrow \infty$  удаляется от центра притяжения на бесконечное расстояние (с нулевой скоростью на бесконечности).

Далее рассмотрим явный вид зависимости истинной аномалии от времени и, в конечном счете, алгоритм расчета координат и компонент скорости как функций времени для каждого типа движения.

### 1.6.2 Круговое движение

$$(p \neq 0, e = 0)$$

Круговое движение представляет собой наиболее простой случай движения в задаче двух тел. Только для кругового движения (и прямолинейного движения с нулевой энергией - см. далее) координаты и компоненты скорости движущегося тела выражаются явными функциями времени. Действительно, при движении по круговой орбите радиуса  $r = p = a$  орбитальные прямоугольные координаты и компоненты скоростей представляются в виде:

$$\begin{array}{ll}
\xi = a \cos M, & \dot{\xi} = -an \sin M, \\
\eta = a \sin M, & \dot{\eta} = an \cos M,
\end{array} \tag{1.123}$$

где  $M = n(t - \tau)$ ,  $n = \sqrt{\mu}/a^{(3/2)}$  - постоянная угловая скорость движения по круговой орбите.

### 1.6.3 Эллиптическое движение

$$(p \neq 0, 0 < e < 1)$$

Каноническое уравнение эллипса в прямоугольных координатах  $O\xi'\eta'$  с началом  $O$  в центре эллипса и фокальной осью  $O\xi'$  имеет вид

$$\frac{\xi'^2}{a^2} + \frac{\eta'^2}{b^2} = 1, \quad (1.124)$$

где  $a$  - большая, а  $b$  - малая полуоси эллипса. Полуфокусное расстояние  $c = ae$  связано с полуосями зависимостью

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{откуда} \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (1.125)$$

а фокальный параметр орбиты выражается через большую полуось и эксцентриситет формулой

$$p = a(1 - e^2). \quad (1.126)$$

Вместе с уравнением (1.124) будем рассматривать параметрические уравнения эллипса:

$$\xi' = a \cos E, \quad \eta' = b \sin E, \quad (1.127)$$

где  $E$  - угол с вершиной в центре эллипса, отсчитываемый от оси  $O\xi'$  в положительном направлении, т.е. против хода стрелки часов. Этот угол называется *эксцентрической аномалией*. На рис. 1.4 проведено построение точки  $M$  на эллипсе по заданным значениям  $a, b$  и  $E$ . Уравнения (1.127) предоставляют удобную возможность геометрического построения эллипса по ряду таких точек.

Для получения зависимости между истинной и эксцентрической аномалиями воспользуемся формулами перехода от системы координат  $O\xi'\eta'$  к орбитальной системе  $M_0\xi\eta$  в плоскости орбиты  $\zeta = 0$ :

$$\xi = \xi' - ae, \quad \eta = \eta'. \quad (1.128)$$

Учитывая (1.82), (1.125), (1.127) и (1.128), отсюда получим систему двух уравнений с тремя переменными величинами  $r$ ,  $v$  и  $E$ :

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned} \quad (1.129)$$

Если из этих уравнений исключить эксцентрическую аномалию, то получим уравнение конического сечения (1.66). Исключая истинную аномалию путем возведения уравнений (1.129) в квадрат и последующего сложения, получим зависимость полярного радиуса  $r$  и величин  $r \pm r \cos v$  от эксцентрической аномалии  $E$  в виде

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (1.130)$$

$$r \pm r \cos v = a(1 - e \cos v) \pm a(\cos E - e). \quad (1.131)$$

Выражения для  $(r + \xi)$  и  $(r - \xi)$  с учетом (1.129) и (1.130) имеют вид

$$\begin{aligned} r + \xi &= r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E), \\ r - \xi &= r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E), \end{aligned} \quad (1.132)$$

или, переходя к половинным углам и извлекая квадратный корень, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} &= \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{E}{2}, \\ \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} &= \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{E}{2}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Отсюда, делением второго соотношения в (1.133) на первое получим искомую связь истинной аномалии с эксцентрической:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (1.134)$$

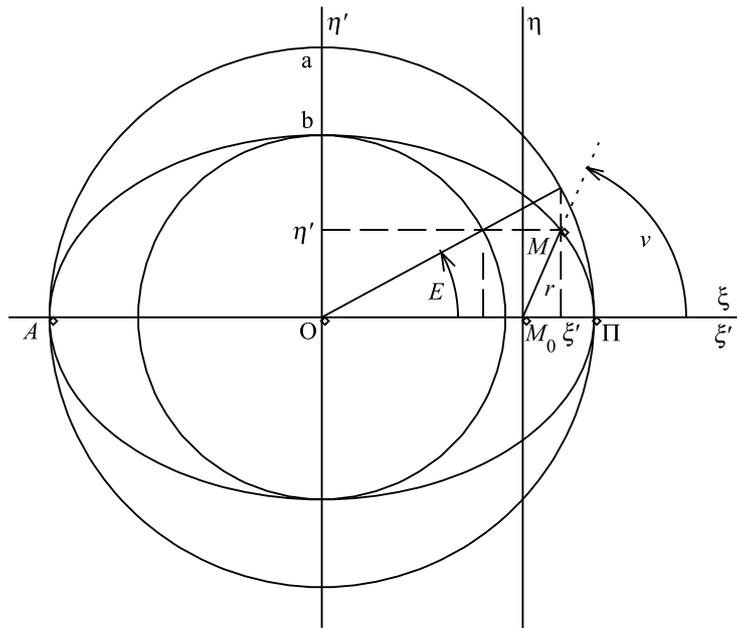


Рис. 1.4. Построение точки эллипса  $M = (\xi', \eta') = (a \cos E, b \sin E)$  по значению эксцентрической аномалии  $E$ . Штриховые прямые, параллельные осям координат, иллюстрируют построение точки  $M$  для заданного значения эксцентрической аномалии  $E$ . Точка  $\Pi$  - перигеум орбиты,  $A$  - апоцентр.

Зависимость между истинной аномалией и временем задается уравнением (1.84). Для вычисления интеграла  $J$  в его левой части сделаем замену переменной интегрирования по формуле (1.134). Подставляя в (1.84) выражения

$$\frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{dE}{\cos^2 \frac{E}{2}}, \quad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{a(1-e)}{r} \cos^2 \frac{E}{2},$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$

(1.135)

и учитывая, что  $E = 0$  при  $v = 0$ , для интеграла  $J$  получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^v r^2 dv = a^2 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} (1-e) \int_0^E (1-e \cos E) dE = \\ &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} (t - \tau). \end{aligned} \quad (1.136)$$

После интегрирования получим окончательное уравнение в виде:

$$E - e \sin E = M, \quad (1.137)$$

где введены обозначения

$$M = n(t - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \quad (1.138)$$

Уравнение (1.137) называется *уравнением Кеплера*, величина  $M$  в астрономии называется *средней аномалией*, а величина  $n$  - *средним движением*.

Средняя аномалия  $M$  связана со временем линейной зависимостью (1.138). Среднее движение  $n$  есть средняя угловая скорость движения по эллипсу. При движении тела по эллиптической орбите истинная, эксцентрическая и средняя аномалии изменяются так, что половины этих углов всегда находятся в одной четверти. Таким образом, эксцентрическую аномалию  $E$  можно рассматривать как обратную функцию средней аномалии  $M = M(E)$ , заданную неявно посредством уравнения Кеплера (1.137).

По заданному значению эксцентрической аномалии  $E$  средняя аномалия  $M$ , а вместе с ней и время  $t$ , определяются непосредственно из уравнения Кеплера (1.137). Но для вычисления траектории движения по заданным кеплеровским элементам необходимо решить уравнение (1.137) в обратном направлении: определить  $E$  для заданного момента времени  $t$ , т.е. приходится иметь дело с трансцендентным уравнением, решить которое в конечном виде невозможно. Для решения уравнения Кеплера можно воспользоваться известными численными методами решения нелинейных уравнений.



В отличие от формулировки закона, данной Кеплером ( $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$ ), в левой части уравнения (1.143) присутствует в качестве множителя сумма масс. Третий закон планетных движений в оригинальной формулировке И.Кеплера можно получить из задачи Кеплера (1.31), для которой  $m \ll \ll m_0$ , так что  $\mu = fm_0$ , в то время как в относительном движении  $\mu = f(m_0 + m)$ .

С помощью обобщенного закона Кеплера можно определять массы планет, обладающих спутниками. Пусть  $m_0$  - масса Солнца,  $m_p$  - масса планеты,  $m_s$  - масса спутника планеты, причем  $m_0 > m_p \gg m_s$ . Тогда, используя (1.143), получим

$$\frac{T_p^2 a_s^3}{T_s^2 a_p^3} = \frac{m_p + m_s}{m_0 + m_p} \simeq \frac{m_p}{m_0 + m_p} \quad \text{или} \quad \frac{m_p}{m_0} \simeq \frac{T_p^2 a_s^3}{T_s^2 a_p^3 - T_p^2 a_s^3}, \quad (1.144)$$

где  $T_p$  и  $T_s$  - периоды обращения планеты и спутника по своим орбитам. С помощью этой формулы можно определить отношение массы планеты к массе Солнца, так как большие полуоси и периоды обращения планеты и спутника весьма точно определяются из наблюдений.

Таблица 1.1. Таблица некоторых кеплеровских элементов

$p$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\tau$
$a =$	$\sin \varphi =$	$\nu =$	$\Omega + 180^\circ$	$\pi =$	$M_0 =$
$= \frac{p}{1 - e^2}$	$= e$	$= \operatorname{tgi}$		$= \Omega + \omega$	$= n(t_0 - \tau)$
$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$					$\varepsilon = \pi + M_0$

Наряду с введенными ранее кеплеровскими элементами орбиты для эллиптического движения используются также другие элементы, например, представленные в таблице 1.1. В этой таблице введены некоторые новые элементы:  $\varphi$  - *угол эксцентриситета*,  $\pi$  - *долгота перицентра* (измеряется двумя углами, расположенными в разных плоскостях),  $M_0$  -

средняя аномалия в эпоху  $t_0$ ,  $\varepsilon$  - средняя долгота в эпоху  $t_0$ ,  $\Omega + 180^\circ$  - долгота нисходящего узла орбиты.

В заключение запишем алгоритм вычисления координат и скоростей в эллиптическом движении на заданный момент времени  $t$  при известных кеплеровских элементах орбиты  $a, e, i, \Omega, \omega$  и средней аномалии  $M_0$  в эпоху  $t_0$ . Алгоритм задается нижеследующей сводкой формул:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, & M &= M_0 + n(t - t_0), \\
 E - e \sin E &= M, & & \text{- численно определяется } E, \\
 \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, & & \text{- вычисляется } v, \\
 r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, & u &= \omega + v, \\
 \dot{r} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} e \sin v, & \dot{v} = \dot{u} &= \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2}, \\
 x &= r\alpha, & \dot{x} &= \dot{r}\alpha + r\alpha'\dot{v}, \\
 y &= r\beta, & \dot{y} &= \dot{r}\beta + r\beta'\dot{v}, \\
 z &= r\gamma, & \dot{z} &= \dot{r}\gamma + r\gamma'\dot{v},
 \end{aligned} \tag{1.145}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \cos \Omega \cos u - & \alpha' &= \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\cos \Omega \sin u - \\
 & - \sin \Omega \sin u \cos i, & & - \sin \Omega \cos u \cos i, \\
 \beta &= \sin \Omega \cos u + & \beta' &= \frac{\partial \beta}{\partial u} = -\sin \Omega \sin u + \\
 & + \cos \Omega \sin u \cos i, & & + \cos \Omega \cos u \cos i, \\
 \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \cos u \sin i.
 \end{aligned} \tag{1.146}$$

В этом алгоритме направляющие косинусы  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  зависят от времени, так как функцией времени являет-

ся аргумент широты  $u$ . Для вычисления координат и скоростей можно применить другой алгоритм, в котором используются не зависящие от времени направляющие косинусы орбитальной фокальной системы координат. Сводка формул этого алгоритма приводится ниже:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, & M &= M_0 + n(t - t_0), \\
 E - e \sin E &= M, & & \text{- численно определяется } E, \\
 r &= a(1 - e \cos E), & \dot{E} &= \frac{an}{r}, \\
 \xi &= a(\cos E - e), & \dot{\xi} &= -a\dot{E} \sin E, \\
 \eta &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, & \dot{\eta} &= a\sqrt{1 - e^2}\dot{E} \cos E, \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_\tau & \alpha'_\tau \\ \beta_\tau & \beta'_\tau \\ \gamma_\tau & \gamma'_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_\tau &= \cos \Omega \cos \omega - & \alpha'_\tau &= \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial \omega} = -\cos \Omega \sin \omega - \\
 & - \sin \Omega \sin \omega \cos i, & & - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\
 \beta_\tau &= \sin \Omega \cos \omega + & \beta'_\tau &= \frac{\partial \beta_\tau}{\partial \omega} = -\sin \Omega \sin \omega + \\
 & + \cos \Omega \sin \omega \cos i, & & + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\
 \gamma_\tau &= \sin \omega \sin i, & \gamma'_\tau &= \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial \omega} = \cos \omega \sin i.
 \end{aligned} \tag{1.147}$$

#### 1.6.4 Гиперболическое движение ( $p \neq 0$ , $e > 1$ )

Каноническое уравнение гиперболы в центральных прямоугольных координатах  $O\xi'\eta'$  представляется в виде

$$\frac{\xi'^2}{a^2} - \frac{\eta'^2}{b^2} = 1, \tag{1.148}$$

где  $a$  - действительная, а  $b$  - мнимая полуоси гиперболы. Полуфокусное расстояние  $c = ae$  связано с полуосями зависимостью

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \text{откуда} \quad b = a\sqrt{e^2 - 1}, \quad (1.149)$$

а фокальный параметр выражается через действительную полуось и эксцентриситет формулой

$$p = a(e^2 - 1). \quad (1.150)$$

Движение тела  $M$  всегда происходит только по одной ветви гиперболы: ближайшей к фокусу, в котором расположено гравитирующее тело  $M_0$ , в случае притяжения тел, и удаленной от фокуса в случае их отталкивания. Мы ограничимся рассмотрением только притяжения тел.

Вместе с уравнением (1.148) будем рассматривать параметрические уравнения гиперболы:

$$\xi' = \frac{a}{\cos F} = a \operatorname{ch} H, \quad \eta' = b \operatorname{tg} F = b \operatorname{sh} H, \quad (1.151)$$

где  $F$  - угол с вершиной в центре гиперболы, отсчитываемый от направления оси  $O\xi'$ . Угол  $F$  является *аналогом эксцентрической аномалии*, а величина  $H$  - его выражением через гиперболические функции

$$H = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{F}{2} + 45^\circ \right), \quad \operatorname{ch} H = \frac{1}{\cos F}, \quad (1.152)$$

$$\operatorname{sh} H = \operatorname{tg} F, \quad \operatorname{th} \frac{H}{2} = \operatorname{tg} \frac{F}{2}.$$

Знание величины аналога эксцентрической аномалии  $F$  дает возможность геометрического построения точки гиперболы  $M$ , что представлено на рис. 1.5.

Связь между орбитальными фокальными координатами  $\xi, \eta$  и центральными координатами  $\xi', \eta'$  имеет вид

$$\xi = ae - \xi', \quad \eta = -\eta'. \quad (1.153)$$

Аналогично эллиптическому движению можно получить два соотношения, связывающие переменные величины  $r$ ,  $v$  и  $F$ :

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos v = a \left( e - \frac{1}{\cos F} \right) \\ \eta &= r \sin v = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F.\end{aligned}\quad (1.154)$$

Направление отсчета углов  $v$  с вершиной в фокусе гиперболы и  $F$  с вершиной в центре гиперболы взаимно противоположны, т.е. при  $v > 0$  будет  $F < 0$  и наоборот.

Путем возведения в квадрат и последующего сложения из этих уравнений можно исключить истинную аномалию  $v$  и получить зависимость  $r$  от  $F$ :

$$r = a \left( \frac{e}{\cos F} - 1 \right). \quad (1.155)$$

Исключение  $r$  из равенств (1.154) приводит к следующей зависимости между  $v$  и  $F$ :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}. \quad (1.156)$$

Убедиться в справедливости такой зависимости можно путем вычисления тангенса половинного угла, используя для этого формулы (1.154) и (1.155):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \frac{1 - \cos v}{\sin v} = \frac{r - a \left( e - \frac{1}{\cos F} \right)}{a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F} = \\ &= \frac{(e+1) \left( \frac{1}{\cos F} - 1 \right)}{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}.\end{aligned}\quad (1.157)$$

Зависимость между аналогом эксцентрической аномалии и временем получим после вычисления интеграла  $J$  в (1.84). Для этого в интеграле  $J$  сделаем замену переменной  $v$  на  $F$

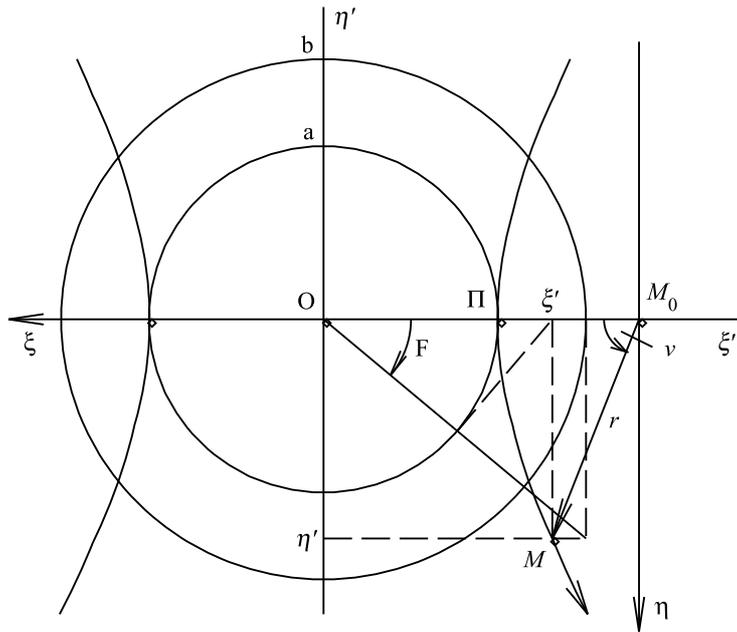


Рис. 1.5. Построение точки гиперболы  $M = (\xi', \eta') = (a/\cos F, b \operatorname{tg} F)$  по значению аналога эксцентрической аномалии  $F$ . Точка  $\Pi$  - перигеицентр орбиты.

по формуле (1.156). Тогда, учитывая (1.155) и

$$dv = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{\cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{F}{2}} dF, \quad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}} = \frac{(e-1) \cos^2 \frac{F}{2}}{e - \cos F}, \quad (1.158)$$

для интеграла  $J$  получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^v r^2 dv = a^2 \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} (e-1) \int_0^F \left( \frac{e - \cos F}{\cos F} \right)^2 \frac{dF}{e - \cos F} = \\ &= \sqrt{\mu a (e^2 - 1)} (t - \tau). \end{aligned} \quad (1.159)$$

Проводя интегрирование и упрощение, представим результат в виде

$$e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{F}{2} + 45^\circ \right) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau). \quad (1.160)$$

Это уравнение своего имени не имеет. Его обычно называют *аналогом уравнения Кеплера* для гиперболического движения.

Если использовать гиперболические функции, то это уравнение принимает более простой вид. Действительно, если учесть, что

$$\begin{aligned} H &= \ln \operatorname{tg} \left( \frac{F}{2} + 45^\circ \right), \quad \operatorname{tg} F = \operatorname{sh} H, \\ \frac{1}{\cos F} &= \operatorname{ch} H, \quad \operatorname{tg} \frac{F}{2} = \operatorname{th} \frac{H}{2}, \end{aligned} \quad (1.161)$$

то уравнение (1.160) запишется в виде

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (1.162)$$

где  $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ ,  $a$  - действительная полуось гиперболы.

Алгоритм вычисления координат и скоростей в гиперболическом движении на заданный момент времени  $t$  при известных кеплеровских элементах  $a, e, i, \Omega, \omega$  и  $M_0$  в эпоху  $t_0$

задается нижеследующей сводкой формул:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, & M &= M_0 + n(t - t_0), \\
 e \operatorname{sh} H - H &= n(t - \tau), & & \text{- численно определяется } H, \\
 \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, & & \text{- определяется } v, \\
 r &= \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos v}, & u &= \omega + v, \\
 \dot{r} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(e^2 - 1)}} e \sin v, & \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu a(e^2 - 1)}}{r^2}, \\
 x &= r\alpha, & \dot{x} &= \dot{r}\alpha + r\alpha'\dot{v}, \\
 y &= r\beta, & \dot{y} &= \dot{r}\beta + r\beta'\dot{v}, \\
 z &= r\gamma, & \dot{z} &= \dot{r}\gamma + r\gamma'\dot{v},
 \end{aligned} \tag{1.163}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \cos \Omega \cos u - & \alpha' &= -\cos \Omega \sin u - \\
 & - \sin \Omega \sin u \cos i, & & - \sin \Omega \cos u \cos i, \\
 \beta &= \sin \Omega \cos u + & \beta' &= -\sin \Omega \sin u + \\
 & + \cos \Omega \sin u \cos i, & & + \cos \Omega \cos u \cos i, \\
 \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \cos u \sin i.
 \end{aligned} \tag{1.164}$$

Второй алгоритм, использующий формулы перехода к

орбитальным фокальным координатам, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, & M &= M_0 + n(t - t_0), \\
 e \operatorname{sh} H - H &= n(t - \tau), & & \text{- вычисляется } H, \\
 r &= a(e \operatorname{ch} H - 1), & \dot{H} &= \frac{an}{r}, \\
 \xi &= a(e - \operatorname{ch} H), & \dot{\xi} &= -a\dot{H} \operatorname{sh} H, \\
 \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, & \dot{\eta} &= a\sqrt{e^2 - 1}\dot{H} \operatorname{ch} H, \\
 \left\| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right. &= & \left\| \begin{array}{l} \alpha_\tau \\ \beta_\tau \\ \gamma_\tau \end{array} \right. \left\| \begin{array}{l} \alpha'_\tau \\ \beta'_\tau \\ \gamma'_\tau \end{array} \right. \left\| \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right. \left\| \begin{array}{l} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{array} \right. \left\|, \\
 \alpha_\tau &= \cos \Omega \cos \omega - & \alpha'_\tau &= -\cos \Omega \sin \omega - \\
 & - \sin \Omega \sin \omega \cos i, & & - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\
 \beta_\tau &= \sin \Omega \cos \omega + & \beta'_\tau &= -\sin \Omega \sin \omega + \\
 & + \cos \Omega \sin \omega \cos i, & & + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\
 \gamma_\tau &= \sin \omega \sin i, & \gamma'_\tau &= \cos \omega \sin i.
 \end{aligned} \tag{1.165}$$

### 1.6.5 Параболическое движение

( $p \neq 0$ ,  $e = 1$ )

Уравнение параболической орбиты записывают в виде

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}, \tag{1.166}$$

где величина  $q = \frac{p}{2}$  определяет расстояние от центра притяжения  $M_0$  до вершины параболы. Величину  $q$  называют *перигелийным расстоянием* для параболы. Ее обычно

используют в качестве кеплеровского элемента вместо фокального параметра орбиты  $p$ .

Для вычисления интеграла  $J = \int_0^v r^2 dv$  сделаем замену переменной интегрирования по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sigma. \quad (1.167)$$

Тогда, учитывая, что  $\sigma = 0$  при  $v = 0$ , а также

$$d\sigma = \frac{dv}{2 \cos^2 \frac{v}{2}}, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{v}{2}} = 1 + \sigma^2, \quad (1.168)$$

получим:

$$J = \int_0^v \frac{q^2 dv}{\cos^4 \frac{v}{2}} = 2q^2 \int_0^\sigma (\sigma^2 + 1) d\sigma = \sqrt{2} \sqrt{\mu q} (t - \tau). \quad (1.169)$$

Вычисление определенного интеграла приводит к *уравнению Баркера*:

$$\frac{\sigma^3}{3} + \sigma = n(t - \tau), \quad (1.170)$$

где введено обозначение  $n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}q^{3/2}}$ . Определение величины  $\sigma$  из этого уравнения по заданному времени  $t$  обычно проводят численно, так как известная формула Кардано мало пригодна для вычислений.

Алгоритм для вычисления координат и скоростей в параболическом движении при заданных кеплеровских элемен-

тах  $q, i, \Omega, \omega$  и  $\tau$  представим в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma^3}{3} + \sigma &= \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t - \tau), & - \text{численно определяется } \sigma, \\
 \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sigma, & - \text{вычисляется } v, \\
 r &= \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}, & u = \omega + v, \\
 \dot{r} &= \sqrt{\frac{\mu}{2q}} \sin v, & \dot{v} = \frac{\sqrt{2\mu q}}{r^2}, \\
 x &= r\alpha, & \dot{x} = \dot{r}\alpha + r\alpha'\dot{v}, \\
 y &= r\beta, & \dot{y} = \dot{r}\beta + r\beta'\dot{v}, \\
 z &= r\gamma, & \dot{z} = \dot{r}\gamma + r\gamma'\dot{v}.
 \end{aligned} \tag{1.171}$$

Направляющие косинусы  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  определяются формулами (1.146).

Как и для предыдущих типов движения, приведем второй алгоритм:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma^3}{3} + \sigma &= n(t - \tau), & - \text{численно определяется } \sigma, \\
 r &= q(1 + \sigma^2), & n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}q^{3/2}}, \quad \dot{\sigma} = \frac{nq}{r}, \\
 \xi &= q(1 - \sigma^2), & \dot{\xi} = -2q\sigma\dot{\sigma}, \\
 \eta &= 2q\sigma, & \dot{\eta} = 2q\dot{\sigma}, \\
 \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} \alpha_\tau & \alpha'_\tau \\ \beta_\tau & \beta'_\tau \\ \gamma_\tau & \gamma'_\tau \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi \\ \eta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{array} \right\|.
 \end{aligned}$$

(1.172)

Направляющие косинусы орбитальной фокальной системы координат  $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau, \alpha'_\tau, \beta'_\tau, \gamma'_\tau$  выражаются формулами (1.147).

### 1.6.6 Прямолинейное движение

$$(p = 0, e = 1)$$

Попытка интегрирования уравнения  $r^2\dot{v} = c = 0$  для прямолинейного движения не приводит к получению недостающего первого интеграла, содержащего явно время, а лишь определяет уравнение прямой в полярных координатах:  $\dot{v} = 0$  и  $v = \text{const}$ . Это уравнение показывает, что прямолинейная траектория всегда проходит через начало координат  $M_0$ .

Для получения недостающего интеграла используем интеграл энергии. Модуль скорости  $V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2}$  в случае прямолинейного движения не содержит трансверсальной составляющей, т.е.  $V = \dot{r}$ , а интеграл энергии (1.40) для прямолинейного движения запишется в виде

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2\mu}{r} + h}. \quad (1.173)$$

Разделяя переменные, приходим к квадратуре

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + h}} = \pm(t - \tau), \quad (1.174)$$

где  $\tau$  - время прохождения через перицентр, совпадающее (в прямолинейном движении) с моментом соударения тел.

Левая часть уравнения (1.174) легко вычисляется, но результат зависит от знака постоянной интеграла энергии  $h$ . Возможны следующие три случая:

$$\begin{aligned} & h < 0, \\ & \frac{\mu}{h\sqrt{-h}} \left( \frac{\sqrt{2\mu + hr}\sqrt{-hr}}{\mu} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{-hr}{2\mu}} \right) = \pm(t - \tau), \end{aligned} \quad (1.175)$$

$$h = 0, \quad r = \left[ \frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}(t - \tau) \right]^{2/3}, \quad (1.176)$$

$$\frac{\mu}{h\sqrt{h}} \left[ \frac{\sqrt{2\mu + hr}\sqrt{hr}}{\mu} - 2 \ln \left( \sqrt{2\mu + hr} + \sqrt{hr} \right) \right] = \pm(t - \tau). \quad (1.177)$$

Отсюда видно, что для заданного момента времени  $t$  в случае  $h = 0$  величины  $r$  и  $\dot{r}$  легко вычисляются в конечном виде:

$$r = \sqrt[3]{\frac{9\mu}{2}(t - \tau)^2}, \quad \dot{r} = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{3(t - \tau)}}. \quad (1.178)$$

Для случаев  $h \neq 0$  при определении  $r$  приходится иметь дело с трансцендентными уравнениями, решать которые можно лишь приближенно с помощью численных методов.

Но для этих двух случаев вычисление  $r$  и его производной  $\dot{r}$  для заданного момента времени  $t$  можно проводить не по формулам (1.175), а по более удобным и привычным формулам эллиптического или гиперболического движений, предварительно осуществив в них предельный переход:  $e \rightarrow 1$ .

Действительно, полагая  $e = 1$ , из формул эллиптического движения для определения значений  $r$  и  $\dot{r}$  получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} E - \sin E &= n(t - \tau), & r &= a(1 - \cos E), \\ \dot{E} &= \frac{na}{r}, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, & \dot{r} &= a \sin E \dot{E}, \end{aligned} \quad (1.179)$$

определяющих прямолинейно-эллиптическое движение.

Аналогично из формул гиперболического движения получим

$$\begin{aligned} \text{sh } H - H &= n(t - \tau), & r &= a(\text{ch } H - 1), \\ \dot{H} &= \frac{na}{r}, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, & \dot{r} &= a \text{sh } H \dot{H}, \end{aligned} \quad (1.180)$$

т.е. уравнения для прямолинейно-гиперболических движений.

Кеплеровскими элементами прямолинейной орбиты кроме уже использованных  $a$ ,  $e = 1$  и  $\tau$  являются также два угла, характеризующих направление прямой в пространстве. Ориентация прямолинейной траектории в пространстве определяется вектором  $\vec{\lambda}$ , исходящим из начала координат  $M_0$ . Направление вектора  $\vec{\lambda}$  можно задать двумя углами, например, долготой и широтой. Но чтобы для прямолинейной орбиты сохранить прежние кеплеровские элементы, необходимо из трех элементов  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $i$  выбрать два, играющих роль долготы и широты, а третий элемент положить равным некоторому значению, сохраняющему зависимости (1.90) и (1.91). Это можно осуществить, полагая, например,  $i = 90^\circ$ , а элементы  $\Omega$  и  $\omega$  тогда будут определять ориентацию прямой в пространстве. Возможны и другие способы выбора угловых элементов. Общее число независимых кеплеровских элементов прямолинейной орбиты равно четырем:  $a$ ,  $\tau$ ,  $\Omega$  и  $\omega$ .

Для случая  $h = 0$  прямолинейно-параболическая орбита будет характеризоваться тремя независимыми элементами, так как величина  $a$  из элементов исключается ( $a \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ ). Наряду с круговым движением для прямолинейно-параболической орбиты определение координат и скоростей осуществляется по конечным формулам без использования приближенных методов решения нелинейных уравнений.

Чтобы получить алгоритм вычисления координат и компонент скоростей для относительного прямолинейного движения, к формулам (1.178), (1.179) и (1.180) необходимо добавить:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Omega \cos \omega, & \dot{x} &= \dot{r} \cos \Omega \cos \omega, \\ y &= r \sin \Omega \cos \omega, & \dot{y} &= \dot{r} \sin \Omega \cos \omega, \\ z &= r \sin \omega, & \dot{z} &= \dot{r} \sin \omega, \end{aligned} \quad (1.181)$$

где наклонение  $i$  положено равным  $90^\circ$ .

Орбитальные координаты для прямолинейного движения не определены, так как не определена плоскость орбиты.

## 1.7 Вычисление эфемерид невозмущенного движения

*Эфемеридой* называется табулированная совокупность геоцентрических положений небесного тела для ряда, как правило, равноотстоящих моментов времени. Положение движущихся тел на небесной сфере можно характеризовать небесными экваториальными координатами: *прямым восхождением*  $\alpha$  и *склонением*  $\delta$ . Для определения положения тела в пространстве необходимо также знать геоцентрическое расстояние  $\rho$ . Общее решение задачи двух тел позволяет определять невозмущенные эфемериды небесных светил (например, планеты, астероида или кометы).

Задачу можно сформулировать так: заданы моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_k$  и известны прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца  $X, Y, Z$  на эти моменты времени, требуется определить сферические геоцентрические экваториальные координаты светила  $\rho, \alpha, \delta$  для этих же моментов времени в предположении, что это тело движется вокруг Солнца по невозмущенной орбите с известными кеплеровскими элементами  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ . Особенность задачи заключается в том, что угловые кеплеровские элементы относятся к эклиптической системе координат, а вычислить нужно экваториальные координаты тела.

Для решения задачи рассмотрим треугольник: Земля  $T$ , Солнце  $M_0$  и небесное тело  $M$ . Обозначим:  $\vec{\rho} = \{\rho \cos \delta \cos \alpha, \rho \cos \delta \sin \alpha, \rho \sin \delta\}$  - геоцентрический радиус-вектор тела  $M$ ,  $\vec{r}_{\text{экв}} = \{x_{\text{экв}}, y_{\text{экв}}, z_{\text{экв}}\}$  - радиус-вектор тела  $M$  в гелиоцентрической экваториальной системе координат,  $\vec{R} = \{X, Y, Z\}$  - радиус-вектор Солнца в геоцентрической экваториальной системе координат. Эти три вектора связаны зависимостью

$$\vec{\rho} = \vec{r}_{\text{экв}} + \vec{R}. \quad (1.182)$$

Правая часть этого равенства известна, так как вектор  $\vec{R}$  считается заданным, а вектор  $\vec{r}_{\text{экв}}$  путем перехода к эклиптическим координатам выражается через вектор  $\vec{r}$ , ко-

торый через заданные кеплеровские элементы определяется по формулам задачи двух тел, рассмотренным в предыдущих разделах.

Связь между  $\vec{r}_{\text{ЭКВ}}$  и  $\vec{r}$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{ЭКВ}} \\ y_{\text{ЭКВ}} \\ z_{\text{ЭКВ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.183)$$

Здесь  $\varepsilon$  - двугранный угол между плоскостями экватора и эклиптики. Радиус-вектор  $\vec{r}$  при заданных кеплеровских элементах определяется по формуле (1.92), а вектор  $\vec{r}_{\text{ЭКВ}}$  тогда можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x_{\text{ЭКВ}} \\ y_{\text{ЭКВ}} \\ z_{\text{ЭКВ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (1.184)$$

где

$$\begin{pmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\tau} & \alpha'_{\tau} \\ \beta_{\tau} & \beta'_{\tau} \\ \gamma_{\tau} & \gamma'_{\tau} \end{pmatrix}. \quad (1.185)$$

Направляющие косинусы  $\alpha_{\tau}, \beta_{\tau}, \dots, \gamma'_{\tau}$ , а также орбитальные координаты  $\xi, \eta$  вычисляются по формулам эллиптического движения (1.147).

После вычисления правых частей уравнения (1.182) прямое восхождение, склонение и геоцентрическое расстояние определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x_{\text{ЭКВ}} + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y_{\text{ЭКВ}} + Y, \\ \rho \sin \delta &= z_{\text{ЭКВ}} + Z. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Сначала определяется  $\rho$  путем возведения уравнений в квадрат, сложения и вычисления арифметического значения корня. Затем из третьего уравнения однозначно определяется склонение в диапазоне  $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ , а из первых двух уравнений определяется прямое восхождение  $\alpha$  в диапазоне  $[0, 24^h)$ .

Вычисляемые таким способом эфемериды малых тел Солнечной системы приводятся в астрономических ежегодниках.

## 1.8 Ряды эллиптического движения

Общее решение уравнений невозмущенного движения не может быть представлено в конечной форме (кроме случаев кругового движения и прямолинейного движения параболического вида), так как зависимость эксцентрической аномалии от времени устанавливается трансцендентным уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (1.187)$$

а орбитальные координаты  $\xi, \eta$  и полярный радиус  $r$  определяются формулами

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r = a(1 - e \cos E). \quad (1.188)$$

Однако для построения аналитической теории возмущенного движения необходимо иметь явные зависимости координат  $x, y, z$  и скоростей  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  от времени. Такие зависимости можно получить только в форме бесконечных рядов.

Наибольший интерес представляют рассматриваемые далее ряды эллиптического движения. Как видно из уравнений (1.147), разложения в ряды координат  $x, y, z$  и скоростей  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  будут полностью определены, если получить соответствующие разложения для  $\sin E$  и  $\cos E$ .

### 1.8.1 Тригонометрические ряды

Если функция  $f(M)$  на интервале  $(0, 2\pi)$  определена и непрерывна всюду за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, имеет конечное число экстремумов, а вне указанного интервала функция  $f(M)$  удовлетворяет условию периодичности  $f(M + 2\pi) = f(M)$ , то такую функцию можно разложить в тригонометрический ряд или ряд Фурье:

$$f(M) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kM + b_k \sin kM), \quad (1.189)$$

где коэффициенты Фурье определяются формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \cos kM dM, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \sin kM dM. \quad (1.190)$$

В точках непрерывности функции  $f(M)$  сумма ряда Фурье в случае его сходимости равна значению функции, а в точках разрыва она равна  $[f(M - 0) + f(M + 0)]/2$ .

Если функция  $f(M)$  четная, то ряд принимает более простой вид

$$f(M) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kM, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(M) \cos kM dM, \quad (1.191)$$

а если нечетная, то

$$f(M) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kM, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(M) \sin kM dM. \quad (1.192)$$

В последующих формулах роль аргумента  $M$  будет играть средняя аномалия. Записывая уравнение Кеплера (1.137) в виде

$$E - M = e \sin E, \quad (1.193)$$

получим  $E - M$  как непрерывную нечетную периодическую функцию  $M$ , что позволяет записать для нее ряд вида (1.192):

$$E - M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kM, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM dM. \quad (1.194)$$

Для вычисления коэффициентов Фурье воспользуемся формулой интегрирования по частям  $\int_0^{\pi} u dv = uv|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v du$ , полагая  $u = E - M$ , а  $dv = \sin kM dM$ :

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{2}{k\pi} (E - M) \cos kM \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM) = \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM dE - \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM dM = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM dE = \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - x \sin E) dE, \end{aligned} \quad (1.195)$$

где обозначено  $x = ke$ . При выводе формулы (1.195) учтено, что эксцентрическая  $E$  и средняя аномалии  $M$  одновременно обращаются в 0 и  $\pi$ . В последнем интеграле осуществлена замена переменной интегрирования  $M$  на  $E$  с помощью (1.193).

Используя интегральное представление функции Бесселя

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - x \sin E) dE, \quad (1.196)$$

для коэффициентов Фурье получим выражение

$$b_k = \frac{2}{k} J_k(ke), \quad (1.197)$$

а ряд (1.194) примет вид

$$E - M = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (1.198)$$

Разложение для  $\sin E$  следует из (1.193) и (1.198) в виде

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (1.199)$$

Остается получить разложение для  $\cos E$ :

$$\cos E = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kM, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos kM dM. \quad (1.200)$$

Определим сначала коэффициент  $a_0$ , который вычисляется после замены переменной интегрирования  $M$  на  $E$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E dM = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E (1 - e \cos E) dE = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cos E - e \frac{1 + \cos 2E}{2} \right) dE = -e. \end{aligned} \quad (1.201)$$

Для получения коэффициентов  $a_k$  вновь воспользуемся интегрированием по частям (при  $u = \cos E$ ,  $dv = \cos kM dM$ )

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{k\pi} \cos E \sin kM \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kM \sin E dE = \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kE - x \sin E) \sin E dE = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k-1)E - \\ &- x \sin E] dE - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k+1)E - x \sin E] dE, \end{aligned} \quad (1.202)$$

где обозначено  $x = ke$  и использовано тригонометрическое соотношение  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ .

Учитывая (1.196), для  $\cos E$  тогда получим разложение

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k} \cos kM. \quad (1.203)$$

Полученные выражения для  $\sin E$  и  $\cos E$  дают возможность из (1.147) сразу получить разложения для координат, отнесенных к большой полуоси, в виде:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \\ \frac{\xi}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{\xi}^{(k)} \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{\eta}^{(k)} \sin kM, \end{aligned} \quad (1.204)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_x^{(k)} \cos kM + B_x^{(k)} \sin kM), \\ \frac{y}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_y^{(k)} \cos kM + B_y^{(k)} \sin kM), \\ \frac{z}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_z^{(k)} \cos kM + B_z^{(k)} \sin kM), \end{aligned} \quad (1.205)$$

где введены обозначения для коэффициентов

$$\begin{aligned} A_{\xi}^{(0)} &= -\frac{3e}{2}, \quad B_{\eta}^{(0)} = 0, \quad A_x^{(k)} = \alpha_{\tau} A_{\xi}^{(k)}, \quad B_x^{(k)} = \alpha'_{\tau} B_{\eta}^{(k)}, \\ A_{\xi}^{(k)} &= \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k}, \quad A_y^{(k)} = \beta_{\tau} A_{\xi}^{(k)}, \quad B_y^{(k)} = \beta'_{\tau} B_{\eta}^{(k)}, \\ B_{\eta}^{(k)} &= \frac{2\sqrt{1-e^2} J_k(ke)}{e}, \quad A_z^{(k)} = \gamma_{\tau} A_{\xi}^{(k)}, \quad B_z^{(k)} = \gamma'_{\tau} B_{\eta}^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.206)$$

Для функции Бесселя известно разложение в форме степенного ряда

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s+n)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (1.207)$$

с помощью которого коэффициенты Фурье  $b_k$  в (1.194) и  $a_k$  в (1.200) можно представить в виде степенных рядов, распо-

ложенных по степеням эксцентриситета:

$$b_k = \frac{2}{k} \left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!(s+k)!}, \quad (1.208)$$

$$a_k = \frac{1}{k} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s) \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!(s+k)!}. \quad (1.209)$$

С помощью этих рядов можно получить разложения для координат и скоростей эллиптического движения. В книге Субботина [10], например, приведены отрезки таких рядов до  $e^6$  включительно. Там же приводятся коэффициенты разложений для функций вида  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos nv$  и  $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin nv$ , где  $v$  - истинная аномалия. Такие функции используются в теории возмущений.

Полученные выше ряды Фурье для координат и компонент скоростей эллиптического движения абсолютно и равномерно сходятся для всех действительных значений средней аномалии и эксцентриситета в диапазонах

$$-\infty < M < \infty, \quad 0 \leq e \leq 1 - \delta, \quad (1.210)$$

где  $\delta$  - некоторое сколь угодно малое положительное число. Поэтому эти ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать, а также производить с ними различные алгебраические операции.

Следует обратить внимание на то, что иногда эти ряды при  $e > e_L$  (см. стр. 87) ошибочно предполагают сходящимися лишь условно.

## 1.8.2 Ряды по степеням эксцентриситета

### 1.8.2.1 Ряд Лагранжа и формула Лагранжа

Для получения решения уравнения Кеплера в виде рядов по степеням эксцентриситета воспользуемся методом, разра-

ботанным Лагранжем. С этой целью рассмотрим уравнение Лагранжа

$$F(z, \alpha) = z - a - \alpha f(z) = 0, \quad (1.211)$$

где  $\alpha, z$  - комплексные числа,  $a$  - вещественное число, а  $f(z)$  - аналитическая функция комплексного переменного  $z$  внутри некоторого замкнутого контура  $S$ , охватывающего точку  $a$ .

Решением уравнения (1.211) является ряд Бурмана-Лагранжа

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f^n(a)], \quad (1.212)$$

а любая голоморфная функция  $\Phi(z)$  представляется формулой Лагранжа

$$\Phi(z) = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\Phi'(a) f^n(a)]. \quad (1.213)$$

Ограничимся рассмотрением частного случая уравнения Лагранжа, а именно, рассмотрим уравнение Кеплера для комплексных значений эксцентрической аномалии  $E$  и эксцентриситета  $e$  при постоянном вещественном значении  $M$ :

$$F(E, e) = E - e \sin E - M = 0. \quad (1.214)$$

Решение  $E = E(e, M)$  этого уравнения представляется в виде ряда Лагранжа

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^n M), \quad (1.215)$$

а любая голоморфная функция  $\Phi(E)$  определяется формулой Лагранжа:

$$\Phi(E) = \Phi(M) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} [\Phi'(M) \sin^n M], \quad (1.216)$$

где под производной нулевого порядка понимается значение самой дифференцируемой функции. При  $e = 0$  эксцентрическая аномалия равна средней:  $E = M$ .

В справедливости формулы (1.215) можно убедиться следующими рассуждениями. Средняя аномалия  $M$  в уравнении Кеплера играет роль постоянного параметра, который может принимать произвольные значения. Поэтому эксцентриситетная аномалия является функцией средней аномалии и эксцентриситета:  $E = E(M, e)$ . Дифференцированием уравнения Кеплера отдельно по  $e$  и по  $M$  приходим к соотношениям

$$\frac{\partial E}{\partial e}(1 - e \cos E) - \sin E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial M}(1 - e \cos E) - 1 = 0, \quad (1.217)$$

с помощью которых для частных производных получается зависимость

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \sin E \frac{\partial E}{\partial M}, \quad (1.218)$$

справедливая и для произвольной дифференцируемой функции  $\Phi(E)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e} = \sin E \frac{\partial \Phi}{\partial M}. \quad (1.219)$$

Путем дифференцирования легко убедиться в справедливости формулы

$$\frac{\partial}{\partial e} \left[ F(E) \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right] = \frac{\partial}{\partial M} \left[ F(E) \frac{\partial \Phi}{\partial e} \right], \quad (1.220)$$

где  $F(E)$  - произвольная дифференцируемая функция.

Далее методом математической индукции докажем формулу

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial e^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left( \sin^n E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right). \quad (1.221)$$

При  $n = 1$  эту формулу уже получили в виде (1.219). Предполагая ее справедливой для  $n$ , докажем для  $n + 1$ . Для этого вычислим производную

$$\frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial e^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial e} \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left( \sin^n E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \frac{\partial}{\partial e} \left( \sin^n E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right). \quad (1.222)$$

С помощью соотношения (1.220), полагая в котором  $F(E) = \sin^n E$  и учитывая (1.219), запишем

$$\frac{\partial}{\partial e} \left( \sin^n E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right) = \frac{\partial}{\partial M} \left( \sin^n E \frac{\partial \Phi}{\partial e} \right) = \frac{\partial}{\partial M} \left( \sin^{n+1} E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right). \quad (1.223)$$

Окончательно из (1.222) и (1.223) получим

$$\frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial e^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \frac{\partial}{\partial e} \left( \sin^n E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right) = \frac{\partial^n}{\partial M^n} \left( \sin^{n+1} E \frac{\partial \Phi}{\partial M} \right). \quad (1.224)$$

Разложение функции  $\Phi(E)$  в ряд Маклорена по степеням эксцентриситета представляется в виде:

$$\Phi = \Phi_0 + e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial e} \right)_0 + \frac{e^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} \right)_0 + \dots + \frac{e^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \Phi}{\partial e^n} \right)_0 + \dots, \quad (1.225)$$

где индекс 0 означает, что функция и ее производные взяты при  $e = 0$ .

Подставляя в (1.225) для производных их значения по формуле (1.221) получим формулу Лагранжа (1.216) и при  $\Phi(E) = E$  ряд Лагранжа в виде (1.215).

Первые члены разложений (1.215) для  $E$ ,  $\Phi(E) = \sin E$  и  $\Phi(E) = \cos E$  представляются в виде

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \dots, \\ \cos E &= \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) + \dots, \\ \sin E &= \frac{1}{e} (E - M) = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{8} (3 \sin 3M - \\ &\quad \sin M) + \dots \end{aligned} \quad (1.226)$$

Зная разложения для  $\sin E$  и  $\cos E$ , нетрудно получить ряды для координат и скоростей, так же как это уже было сделано для рядов Фурье.

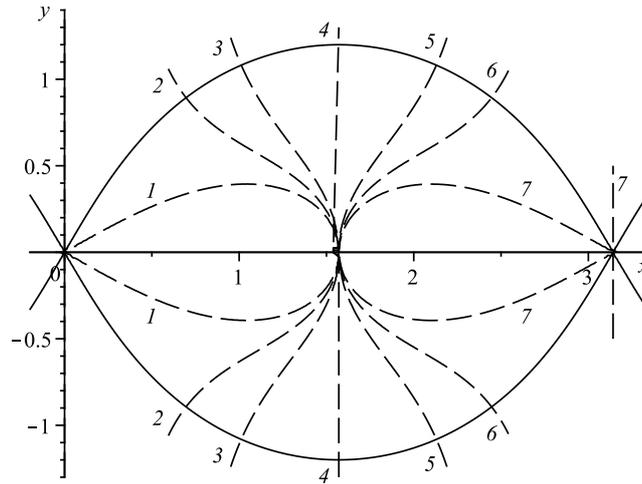


Рис. 1.6. Особые точки на комплексной плоскости эксцентрической аномалии. Обозначения: сплошной линией изображена кривая, определяемая вторым уравнением в системе (1.230), пронумерованными штриховыми линиями - первым уравнением в (1.230) для различных значений  $M$ . Цифровые обозначения штриховых кривых см. рис. 1.7.

### 1.8.2.2 Круг сходимости Лапласа

Радиус сходимости  $e_R$  рядов (1.215) и (1.216) согласно первой теореме Абеля определяется расстоянием от центра разложения  $e = 0$  до ближайшей особой точки [10] на плоскости комплексных значений эксцентриситета.

Особые точки функции  $E = E(e)$ , заданной в неявной форме уравнением Кеплера (1.214) с вещественным параметром  $M$ , определяются системой уравнений:

$$E - e \sin E - M = 0, \quad 1 - e \cos E = 0. \quad (1.227)$$

Для отыскания области сходимости рядов (1.215) и (1.216) воспользуемся следующей схемой вычислений. Исключая из первого уравнения системы (1.227) эксцентриситет с помо-

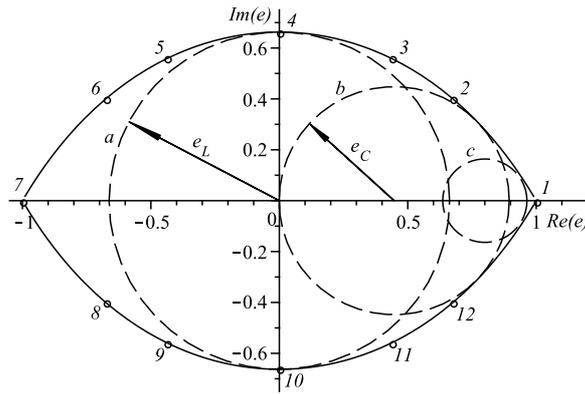


Рис. 1.7. Особые точки на комплексной плоскости эксцентриситета. Обозначения. Сплошная кривая (в форме линзы) - все множество особых точек. Помеченные буквами штриховые окружности:  $a$  - круг сходимости Лапласа,  $b$  - круг Шарлье с максимальным интервалом сходимости,  $c$  - круг сходимости ряда Шарлье при  $e_0 = 0.8$ . Пронумерованные особые точки: 1 - для значения средней аномалии  $M = 0$ , 2 - для  $M = \pi/8$ , 3 -  $M = \pi/4$ , 4 -  $\pi/2$ , 5 -  $3\pi/4$ , 6 -  $7\pi/8$ , 7 -  $\pi$ , 8 -  $9\pi/8$ , 9 -  $5\pi/4$ , 10 -  $3\pi/2$ , 11 -  $7\pi/4$ , 12 -  $15\pi/8$ .

щью второго уравнения, получим уравнение для определения особых точек эксцентрической аномалии  $E^*$  как функции средней аномалии  $E^* = E^*(M)$ . Подставляя эту функцию в первое уравнение (1.227), получим особые точки эксцентриситета в виде функции средней аномалии:  $e^* = e^*(M)$ . Однако получить явные зависимости  $E^*(M)$  и  $e^*(M)$  невозможно, поэтому воспользуемся их численным представлением.

Итак, для определения особых точек эксцентрической аномалии подставим выражение  $e = 1/\cos E$ , полученное из

второго уравнения системы (1.227), в первое. Тогда получим:

$$E - \operatorname{tg} E - M = 0. \quad (1.228)$$

Зная комплексное значение эксцентрической аномалии  $E = x + iy$ , где  $i = \sqrt{-1}$ , можно получить величины  $1/\cos E$  и  $\operatorname{tg} E$  в виде

$$\begin{aligned} e = \frac{1}{\cos E} &= \frac{\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}, \\ E - M = \operatorname{tg} E &= \frac{\sin x \cos x + i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned} \quad (1.229)$$

Тогда действительная и мнимая части уравнения (1.228) дадут систему двух уравнений для отыскания действительных величин  $x$  и  $y$ , определяющих особые точки  $E^* = x^* + iy^*$ , в виде

$$x - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} - M = 0, \quad y - \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = 0. \quad (1.230)$$

Решить эту трансцендентную систему в явном аналитическом виде невозможно. Но эта система легко решается численно, определяя численные зависимости  $x^*(M)$ ,  $y^*(M)$  и, следовательно,  $E^*(M)$ .

Второе уравнение в (1.230) можно разрешить относительно  $x$  и получить уравнение кривой  $E^* = x^* + iy^*$ , на которой располагаются все особые точки:

$$x^* = \arccos \left( \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sh} y^* \operatorname{ch} y^*}{y^*} - \operatorname{sh}^2 y^*} \right) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.231)$$

График этой двузначной  $\pi$ -периодической функции, напоминающей две пересекающиеся синусоиды вида  $y = \pm \sin x$ , изображен на рис. 1.6 (сплошная кривая) на комплексной плоскости переменной  $E$  для интервала  $x \in [0, \pi]$ . На этом же

рисунке изображены штриховые кривые, определяемые первым уравнением системы (1.230) для различных значений  $M$ . Пересечение этих кривых с кривой (1.231) происходит в двух комплексно-сопряженных особых точках  $E^* = x^* \pm iy^*$ . При  $M = k\pi$  эти точки сливаются в одну действительную точку  $E^* = k\pi$ , а при  $M = \pi/2 + k\pi$  сопряженные комплексные особые точки принимают значения  $E^* = \pi/2 + k\pi \pm iE_L$ , где  $E_L = 1.19967864\dots$  - известное значение эксцентрисической аномалии при определении радиуса сходимости Лапласа, т.е. корень второго уравнения в системе (1.230) при  $x = \pi/2$ , которое можно записать в виде:

$$y = \operatorname{cth} y. \quad (1.232)$$

Знание особых точек эксцентрисической аномалии  $E^*$  дает возможность получить особые точки  $e^*$  для эксцентриситета

$$e^* = \frac{1}{\cos E^*} = \frac{\cos x^* \operatorname{ch} y^* + i \sin x^* \operatorname{sh} y^*}{\cos^2 x^* + \operatorname{sh}^2 y^*}. \quad (1.233)$$

На комплексной плоскости эксцентриситета  $e = \operatorname{Re}(e) \pm i\operatorname{Im}(e)$  равенство (1.233) для всей совокупности значений средней аномалии  $M$  определяет некоторую замкнутую кривую, имеющую форму сечения линзы, с центром в точке  $e = 0$ . График этой кривой представлен на рис. 1.7. Каждому значению  $M \in [0, 2\pi]$  на этой кривой соответствует некоторая особая точка (см. точки, помеченные цифрами вдоль кривой). Эта же точка соответствует значениям  $M + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В частности, при  $M = 2k\pi$ , на кривой (1.233) получим точку  $e^* = 1$ , при  $M = (2k + 1)\pi$  - точку  $e^* = -1$ , а при  $M = \pm\pi/2 + 2k\pi$  получается пара сопряженных особых точек  $e^* = \pm ie_L$ , где  $e_L = 1/\cos E_L = 0.6627434196\dots$  - известный *предел Лапласа*. Круг сходимости Лапласа определяется расстоянием от начала координат до ближайшей особой точки (это сразу две точки  $\pm ie_L$ ). На рис. 1.7 круг Лапласа изображен его границей - окружностью (кривая  $a$ ).

Таблица 1.2. Сходимость ряда Лагранжа при  $e \geq e_L$  на части эллиптической орбиты, определяемой интервалом  $k\pi - M^* < M < k\pi + M^*$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$e$	$M^*$ (град)	$e$	$M^*$ (град)
$e_L$	90°	0.80	19.°40151216
0.663	86.53854876	0.81	17.54962921
0.664	82.34699258	0.82	15.82340240
0.665	79.75353235	0.83	14.21390533
0.666	77.70252221	0.84	12.71152497
0.667	75.95363615	0.85	11.30939483
0.668	74.40456384	0.86	10.00133514
0.669	73.00174715	0.87	8.782539369
0.67	71.71016691	0.88	7.648200987
0.68	62.05387119	0.89	6.594200139
0.69	55.19977568	0.90	5.618476869
0.70	49.68463896	0.91	4.717597961
0.71	45.00995637	0.92	3.889503479
0.72	40.92922210	0.93	3.132820128
0.73	37.30030061	0.94	2.448234559
0.74	34.03255465	0.95	1.834373475
0.75	31.06281281	0.96	1.293296812
0.76	28.34438325	0.97	0.8277511594
0.77	25.84293366	0.98	0.4439163206
0.78	23.53237152	0.99	0.1548385620
0.79	21.39072418	1	0

### 1.8.2.3 Области сходимости при $e > e_L$

Радиус сходимости ряда Лагранжа можно увеличить, если исключить из рассмотрения особые точки, прилегающие к точкам  $\pm ie_L$ . Это можно сделать, если на эллиптической орбите не рассматривать некоторые области, расположенные вблизи значений средней аномалии  $M = \pi/2 + 2k\pi$  и  $M = -\pi/2 + 2k\pi$ , т. е. исследовать сходимость ряда Лагранжа не на всей орбите, а только на некоторых ее частях, охватывающих апсиды орбиты.

Зависимость радиуса сходимости  $e_R$  от средней аномалии  $M$  устанавливается формулой

$$e_R = |e^*| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x^* + \operatorname{sh}^2 y^*}}, \quad (1.234)$$

в которой  $x^*$  и  $y^*$  являются функциями средней аномалии  $M$ , определяемыми системой уравнений (1.230). Функция  $e_R = e_R(M)$  представляет собой периодическую функцию с периодом  $\pi$ .

На плоскости действительных переменных "средняя аномалия - эксцентриситет" эта функция определяет границу области сходимости рядов (1.215), которая изображена на рис. 1.8 на интервале  $M$  от 0 до  $\pi$  и в таблице 1.2. Кривая  $e(M)$  достигает своего минимума  $e = e_L$  в точках  $M = \pi/2 + k\pi$ , а в точках  $M = k\pi$  (перигеиум и апогеиум орбиты) принимает максимальное значение  $e = 1$ . При  $e < e_L$  ряд Лагранжа сходится на всей эллиптической орбите (область сходимости изображена с наклонной штриховкой). Ряд Лагранжа остается сходящимся и для значений эксцентриситета больше предела Лапласа  $e_L$ , но только на некоторой части эллиптической орбиты в окрестности перигеиума или апогеиума (на рис. 1.8 эта область имеет горизонтальную штриховку). Интервалы средней аномалии, внутри которых ряд Лагранжа абсолютно и равномерно сходится, приводятся также в таблице 1.2 для ряда выбранных значений эксцентриситета  $e \geq e_L$ , а на рис. 1.9 эти области сходимости на

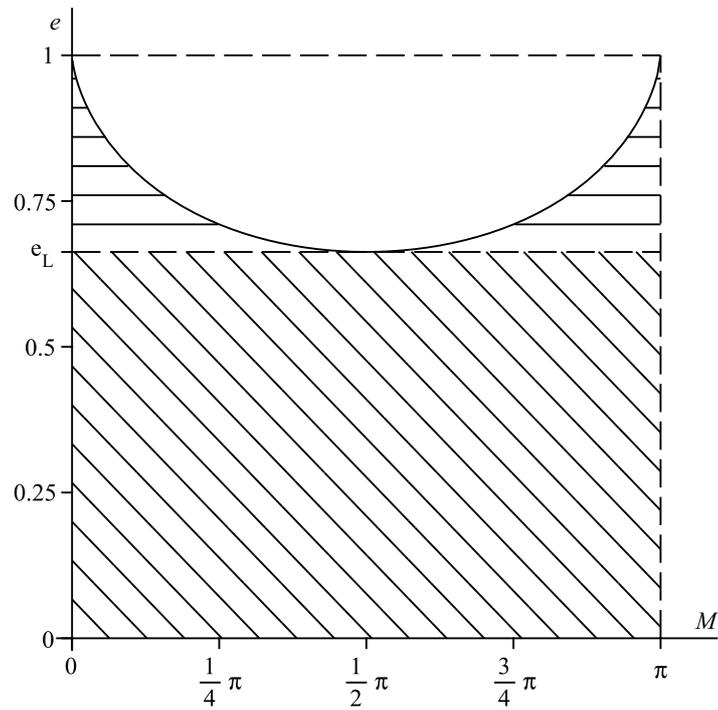


Рис. 1.8. Область сходимости ряда Лагранжа на всей эллиптической орбите при  $e < e_L$  (область помечена наклонной штриховкой) и на части эллиптической орбиты при  $e > e_L$  (горизонтальная штриховка). Эти области периодически повторяются на всей числовой оси средней аномалии  $M$  с периодом  $\pi$ .

частях эллиптической орбиты изображены с помощью круговых диаграмм средней аномалии.

Эти результаты представляют не только теоретический, но и практический интерес для астрономии и астродинамики, открывая новые возможности для создания аналитических теорий движения небесных тел по орбитам с большим эксцентриситетом при гарантированной сходимости рядов в окрестности апсид орбит. Такие абсолютно сходящиеся ряды можно использовать, например, для вычисления орбит

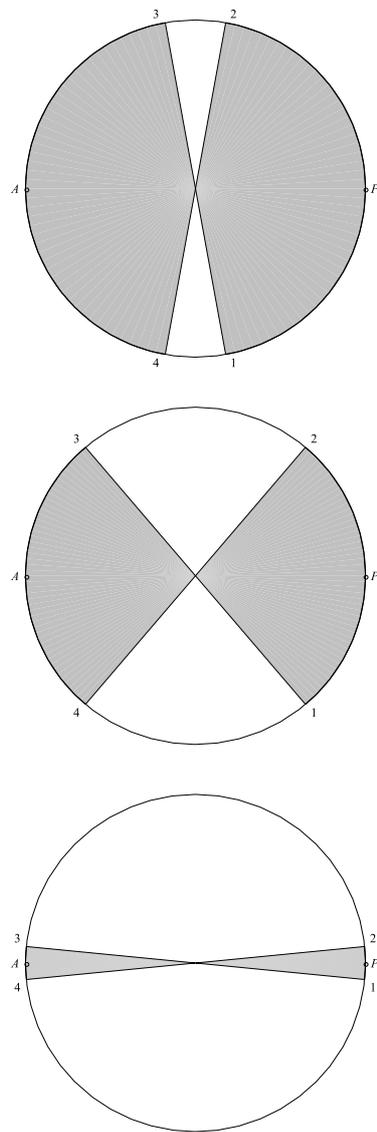


Рис. 1.9. Диаграммы областей сходимости ряда Лагранжа при  $e > e_L$ . Обозначения:  $P$  (перигеиум),  $A$  (апогеиум) - апериды орбиты, 1 -  $M = -M^*$ , 2 -  $M = M^*$ , 3 -  $M = \pi - M^*$ , 4 -  $M = \pi + M^*$ . Верхняя диаграмма приведена для  $e = 0.665 > e_L$ , ( $M^* = 79.^\circ 75$ ), средняя -  $e = 0.7$ , ( $M^* = 49.^\circ 68$ ), нижняя -  $e = 0.9$ , ( $M^* = 5.^\circ 62$ ).

комет или астероидов с большим эксцентриситетом при их прохождении через окрестность перигелия, где в основном и проводятся их наблюдения. А для искусственных спутников Земли с большим эксцентриситетом, "зависающих" в окрестности апогея (спутники типа "Молния"), орбиты можно определять с помощью рассматриваемых рядов с гарантированной сходимостью на установленных выше интервалах средней аномалии.

#### 1.8.2.4 Круг сходимости Шарлье

Интервал сходимости рядов по степеням эксцентриситета можно увеличить, если, следуя Шарлье, вместо ряда Маклорена (1.215) рассмотреть ряд Тейлора по степеням  $e - e_0$ :

$$E = E_0 + c_1(e - e_0) + c_2(e - e_0)^2 + \dots, \quad (1.235)$$

где коэффициенты  $c_i$  являются функциями  $E_0$  и  $M$ .

При  $e = e_0$  ряд (1.235) принимает значение  $E = E_0$ , которое, в свою очередь, определяется абсолютно сходящимся рядом Фурье (1.198)

$$E_0 = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke_0)}{k} \sin kM. \quad (1.236)$$

Аналогичными рядами Фурье могут быть представлены коэффициенты  $c_1, c_2, \dots$ . Тогда ряд (1.235) преобразуется в повторный ряд Фурье-Тейлора. Такие ряды называют рядами Пуассона. Ряд (1.235) для задачи двух тел справедливо также называть *рядом Шарлье*.

Так как указанные ряды Фурье абсолютно сходятся для любых значений эксцентриситета, то интервал сходимости ряда (1.235) определяется теми же особыми точками, что и рядов (1.215). Изменяется только положение центра разложения - точки  $e_0$ .

Несмотря на уменьшение радиуса сходимости рядов Фурье-Тейлора по сравнению с рядами Маклорена (1.215),

интервал сходимости, как показал Шарлье, можно увеличить. Правая граница интервала сходимости рядов Шарлье всегда равна  $e_0 + e_R$ , в то время как левая граница при изменении  $e_0$  от 0 до некоторого значения  $e_C$  остается равной нулю, т. к. значения  $e < 0$  не имеют физического смысла, а при  $e_0 > e_C$  становится равной  $e_0 - e_R$ . При  $e_0 \rightarrow 1$  длина интервала сходимости стягивается к нулю. Интервалы сходимости рядов (1.235) в зависимости от величины  $e_0$  для действительных движений представлены на рис. 1.10. Образованная этими интервалами область сходимости на рисунке заштрихована.

Наибольший интервал сходимости соответствует значению  $e_0 = e_C$ , а радиус сходимости  $e_R$  при этом также равен  $e_C$ :

$$\begin{aligned} -e_C \leq e - e_C < e_C = 0.447743205 \quad \text{или} \\ 0 \leq e < 2e_C = 0.895486410, \end{aligned} \quad (1.237)$$

где левая граница  $e = 0$  (круговое движение) включена в область сходимости. Круг сходимости для  $e_0 = e_C$  изображен на рис. 1.7 (кривая  $b$ ). Значение  $e_C$  следует называть *пределом Шарлье* (Шарлье для этого предела получил значение  $e_C = 0.445$ ).

Можно получить абсолютно сходящиеся ряды для значений эксцентриситета, сколь угодно близких к единице. Для этого значение  $e_0$  следует выбрать достаточно близким к единице. На рис. 1.7 для иллюстрации изображен круг сходимости при  $e_0 = 0.8$  (кривая  $c$ ), для которого интервал сходимости рядов Шарлье становится равным  $0.63... < e < 0.97...$

### 1.8.2.5 Окончательные результаты

Изложенные результаты можно сформулировать следующим образом:

- разложения в форме рядов Лагранжа (1.215) абсолютно и равномерно сходятся для значений эксцентриситета, удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq e < e_L$ , где  $e_L = 0.662743420$

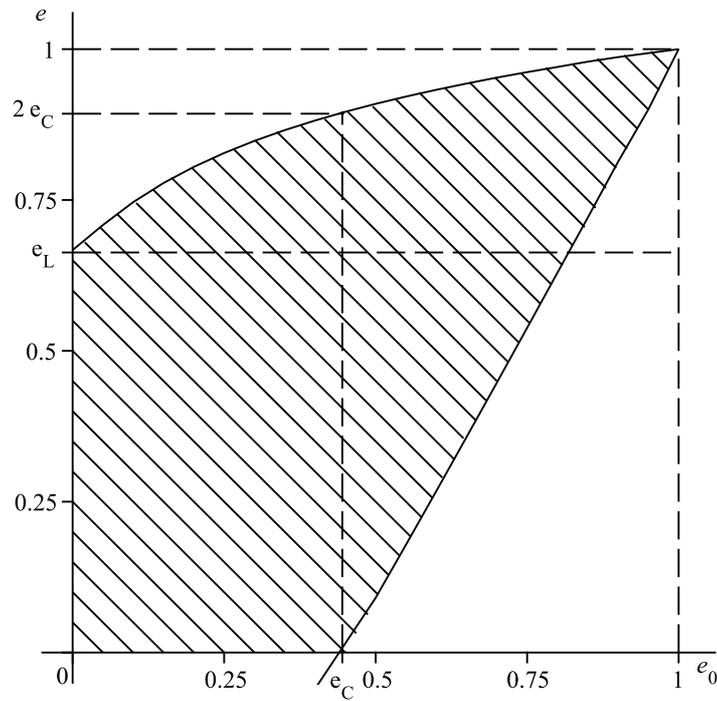


Рис. 1.10. Интервалы сходимости ряда Шарлье. Заштрихованная область определяет границы интервала сходимости в зависимости от значения центра разложения  $e_0$ . Штриховые прямые иллюстрируют пределы Шарлье  $e_C$  и Лапласа  $e_L$ .

- предел Лапласа, и для всех значений средней аномалии  $-\infty < M < \infty$ ;

- при  $e > e_L$  ряды Лагранжа сходятся только на части эллиптической орбиты для значений средней аномалии в окрестности перицентра или апоцентра  $k\pi - M^* < M < k\pi + M^*$  (см. рис. 1.8);

- разложение в форме рядов Шарлье (1.235) при  $e_0 = e_C = 0.447743205$  имеет максимальный интервал сходимости  $0 \leq e < 2e_C = 0.895486410$  (см. рис. 1.7 и 1.10), где  $e_C$  - предел Шарлье. Ряды Шарлье можно использовать для зна-

чений эксцентриситета, сколь угодно близких к единице, но радиус сходимости при этом уменьшается, стремясь к нулю при  $e \rightarrow 1$ .

Если использовать одновременное разложение в ряд Маклорена по степеням эксцентриситета и в тригонометрический ряд Фурье, то получится ряд Пуассона. В эллиптическом движении для произвольной функции  $f(e, M)$ , зависящей от эксцентриситета и средней аномалии, ряд Фурье-Маклорена можно представить в виде

$$f(e, M) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^i (a_{ij} \sin jM + b_{ij} \cos jM). \quad (1.238)$$

Если этот ряд рассматривать как повторный с внешним суммированием по степеням эксцентриситета, то он сходится абсолютно в области

$$0 \leq e < e_L = 0,6627434, \quad -\infty < M < \infty. \quad (1.239)$$

Если же ряд Фурье-Маклорена (1.238) рассматривать как повторный ряд с внутренним суммированием по эксцентриситету, то он сходится абсолютно в области

$$0 \leq e < 1, \quad -\infty < M < \infty. \quad (1.240)$$

Известно, что перестановка бесконечного числа членов в абсолютно сходящемся ряде не влияет на его сходимость. Установлено также, что ряд Лагранжа по степеням эксцентриситета перемещением бесконечного числа членов формально можно привести к виду, совпадающему с рядом Фурье для кратных значений средней аномалии. Возможно и обратное формальное перестроение ряда Фурье в ряд Лагранжа. Опираясь на эти положения, в некоторых руководствах по небесной механике приводятся неверные сведения о сходимости рядов Фурье вплоть до утверждения об их условной сходимости при эксцентриситете, превышающем предел Лапласа.

На самом деле предел Лапласа не имеет никакого отношения к радиусу сходимости ряда Фурье. Ряды Лагранжа и Фурье являются качественно разными рядами. Ряд Фурье представляет собой функциональный ряд по синусам и косинусам кратных значений средней аномалии, в котором эксцентриситет является действительной константой. А ряд Лагранжа - это функциональный ряд по степеням эксцентриситета, радиус сходимости которого определяют комплексные значения эксцентриситета (особые точки). Средняя аномалия в ряде Лагранжа является вещественным параметром. Упомянутая формальная перестановка членов в ряде Фурье производится после предварительной подстановки в этот ряд разложений в степенные ряды функций Бесселя. Но подстановка ряда в ряд может привести (и в нашем случае приводит) к изменению радиуса сходимости вновь получаемого ряда. Без учета этого изменения и получается ошибочный вывод о радиусах сходимости рассматриваемых рядов.

Следует заметить, что ряды Шарлье никогда не использовались в практических приложениях, так как неизвестны аналитические выражения для коэффициентов этих рядов. Современные возможности для проведения аналитических и численных выкладок на компьютерах позволяют, по крайней мере принципиально, использовать абсолютно сходящийся ряд Шарлье для определения орбит небесных тел с эксцентриситетом, сколь угодно близким к единице.

### 1.8.3 Ряды по степеням средней аномалии

#### 1.8.3.1 Построение рядов

Ряды Тейлора по степеням разности  $M - M_0$  для эксцентрической аномалии  $E$  и радиуса-вектора  $\vec{r}$  в задаче двух

тел можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(M - M_0)^s}{s!} \left( \frac{d^s E(M)}{dM^s} \right)_{M=M_0} = \\
 &= E_0 + \left( \frac{1}{1 - e \cos E} \right)_{M=M_0} (M - M_0) - \\
 &\quad - \left[ \frac{e \sin E}{(1 - e \cos E)^3} \right]_{M=M_0} \frac{(M - M_0)^2}{2!} + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.241}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \vec{r}_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(M - M_0)^s}{s!} \left( \frac{d^s \vec{r}}{dM^s} \right)_{M=M_0} = \\
 &= \vec{r}_0 + \left( \frac{d\vec{r}}{dM} \right)_{M=M_0} (M - M_0) + \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dM^2} \right)_{M=M_0} \frac{(M - M_0)^2}{2!} + \\
 &\quad + \left( \frac{d^3 \vec{r}}{dM^3} \right)_{M=M_0} \frac{(M - M_0)^3}{3!} + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.242}$$

где  $M_0$  и  $E_0$  - соответственно средняя и эксцентрическая аномалии в эпоху  $t_0$ ,  $\vec{r}_0$  и  $(d\vec{r}/dM)_0$  - начальные значения радиус-вектора и скорости. При  $M_0 = 0$  эти ряды преобразуются в ряды Маклорена по степеням  $M$ .

Ряды (1.241) и (1.242) при необходимости можно перестроить в ряды по степеням времени. Для этого следует воспользоваться зависимостями

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad M - M_0 = n(t - t_0), \quad \frac{d^s}{dM^s} = \frac{1}{n^s} \frac{d^s}{dt^s}, \tag{1.243}$$

где  $\tau$  - время прохождения через перицентр,  $n$  - среднее движение.

Все производные в разложениях (1.241) и (1.242) легко определяются. Для ряда (1.241) все производные эксцентрической аномалии вычисляются путем  $s$ -кратного дифференцирования уравнения Кеплера. А для ряда (1.242) значения двух первых слагаемых устанавливаются по начальным значениям координат и скоростей, третье слагаемое выражается через правую часть уравнений относительного дви-

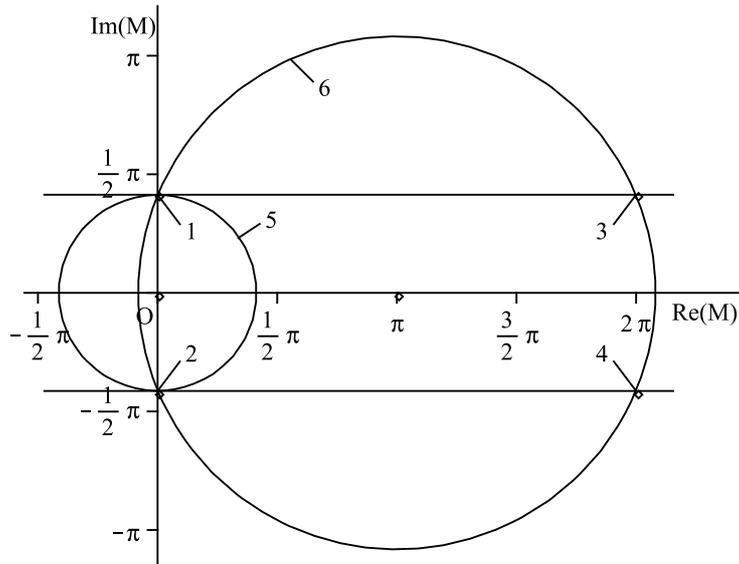


Рис. 1.11. Особые точки и круги сходимости на комплексной плоскости средней аномалии для  $e = 0.2$ . Обозначения: 1, 2 - особые точки  $\pm i\beta$ ; 3, 4 - особые точки  $2\pi \pm i\beta$ ; 5 - круг сходимости для  $M_0 = 0$ ; 6 - круг сходимости для  $M_0 = \pi$ .

жения (1.25), т.е.  $\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3$ , а все дальнейшие производные определяются дифференцированием этой правой части с последующей заменой появляющихся вторых производных радиуса-вектора той же правой частью уравнения (1.25).

Координаты, скорости и разность  $E - M$  в эллиптическом движении являются  $2\pi$ -периодическими функциями средней аномалии. Поэтому для определения области корректного практического использования этих рядов можно ограничиться изучением сходимости на каком-либо интервале средней аномалии, длиной  $2\pi$ , т.е. на одном обороте по эллиптиче-

ской орбите. Если, доказать сходимость ряда на таком интервале, то с помощью этого сходящегося ряда можно определять значения  $\vec{r}(M)$  на всей числовой оси  $M$ , так как  $\vec{r}(M + 2k\pi) = \vec{r}(M)$ . Сходимости ряда на всей числовой оси независимой переменной  $M$  для этого не требуется.

Определение радиуса сходимости рядов (1.241) и (1.242) сводится к поиску особых точек неявной функции  $E(M)$ , заданной уравнением Кеплера в предположении, что эксцентриситет имеет постоянное вещественное значение  $e < 1$ , а  $E$  и  $M$  принимают комплексные значения. Координаты особых точек определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} F(E, M) &= E - e \sin E - M = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial E} &= 1 - e \cos E = 0, \end{aligned} \quad (1.244)$$

Комплексные значения эксцентрической аномалии  $E$ , удовлетворяющие второму уравнению в системе (1.244), т.е. условию  $\cos E = 1/e$ , можно представить в виде

$$\begin{aligned} E^{(k)} &= \pm i\alpha + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \alpha &= \arccos \frac{1}{e} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}. \end{aligned} \quad (1.245)$$

Тогда из первого уравнения системы (1.244) вычисляются комплексные значения средней аномалии  $M^{(k)}$ , определяющие особые точки на комплексной плоскости  $M$

$$M^{(k)} = E^{(k)} - e \sin E^{(k)} = 2k\pi \pm i\beta, \quad \beta = \alpha - \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.246)$$

Все особые точки являются изолированными. При постоянном значении эксцентриситета на комплексной плоскости  $M$  они располагаются на двух прямых, равноотстоящих от действительной оси. Значение средней аномалии  $M_0$  в эпоху  $t_0$  задается соответствующей точкой на действительной оси. Радиус сходимости  $M_R$  рядов (1.241) и (1.242) тогда определяется расстоянием от точки  $M_0$  до ближайшей особой

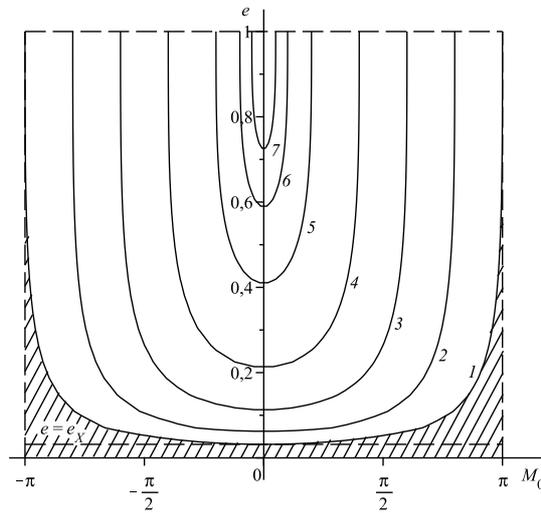


Рис. 1.12. Сходимость рядов по степеням средней аномалии на всей эллиптической орбите и на ее части. Заштрихована область значений  $M_0$  и  $e$ , для которых имеет место сходимость ряда (1.241) на всей эллиптической орбите; в незаштрихованной области - сходимость только на части орбиты, определяемой неравенством  $|M - M_0| < M_R < \pi$ . Обозначения: горизонтальная штриховая прямая иллюстрирует предел Холшевникова  $e = e_X$ , сплошная кривая 1 - границу сходимости на всей эллиптической орбите, кривая 2 - сходимость на части орбиты, равной 80% периода обращения, 3 - на части в 60% периода, 4 - 40%, 5 - 20%, 6 - 10%, 7 - 5%.

точки  $M^{(k)}$ . Не ограничивая общности, значение  $M_0$  будем считать таким, что ближайшими особыми точками являются две точки  $M^* = \pm i\beta$ . Следовательно, радиус сходимости определяется формулой

$$M_R = |(M^*)_{k=0} - M_0| = |\pm i\beta - M_0| = \sqrt{\beta^2 + M_0^2}. \quad (1.247)$$

Окружность радиуса  $M_R$  с центром в точке  $M_0$  определяет границу круга сходимости, а точки пересечения этой окружности с действительной осью определяют интервал

Таблица 1.3. Граница сходимости рядов (1.241) и (1.242) на всей эллиптической орбите, определяемая неравенствами  $2k\pi + M' < M_0 < 2(k+1)\pi - M'$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$e$	$M^*$ (град)	$e$	$M^*$ (град)
0	0°	0.045	82°.2148968
$e_x$	0	0.048	89.0426656
0.0319	7.9190034	0.050	93.0270541
0.0320	11.2757142	0.055	101.513473
0.0321	13.8314011	0.06	108.442874
0.0322	15.9753009	0.07	119.225018
0.0323	17.8564081	0.08	127.334450
0.0324	19.5507718	0.09	133.715281
0.0325	21.1034627	0.10	138.895412
0.0326	22.5438122	0.11	143.199062
0.0327	23.8921833	0.12	146.838842
0.0328	25.1634010	0.13	149.961168
0.0329	26.3686588	0.15	155.044981
0.0330	27.5166565	0.16	157.142206
0.0335	32.6004307	0.17	159.007650
0.0340	36.9110629	0.18	160.676871
0.0345	40.6973902	0.20	163.534960
0.035	44.0967998	0.25	168.708204
0.036	50.0492786	0.30	172.110869
0.037	55.1812109	0.35	174.450350
0.038	59.7147619	0.4	176.101680
0.039	63.7864145	0.5	178.136110
0.040	67.4874282	0.6	179.185028
0.041	70.8825472	0.7	179.699533
0.042	74.0197604	0.8	179.920863
0.043	76.9358561	0.9	179.991091
0.044	79.6597996	1	180

сходимости для интересующих нас действительных значе-

ний средней аномалии

$$M_0 - M_R < M < M_0 + M_R. \quad (1.248)$$

На рис. 1.11 для  $e = 0.2$  изображены два круга сходимости: наименьший - для  $M_0 = 0$  и наибольший - для  $M_0 = \pi$ .

Зависимость (1.247) радиуса сходимости  $M_R$  от  $e$  и  $M_0$  представлена на рис. 1.12 на плоскости  $M_0 e$ . Кривая  $M_R = \pi$  (кривая 1 на рис. 1.12), определяемая равенством

$$\sqrt{\beta^2 + M_0^2} = \pi, \quad (1.249)$$

устанавливает границу сходимости ряда (1.241) на всей эллиптической орбите ( $-\pi \leq M \leq \pi$ , которая приведена также в таблице 1.3. Ниже кривой (1.249) располагается область сходимости на всей эллиптической орбите (на рисунке область заштрихована). Кривая (1.249) при  $M_0 = 0$  имеет минимум  $e = e_X = 0.031803065887\dots$ , обнаруженный К.В.Холшевниковым. При  $e < e_X$  ряды (1.241, 1.242) будут сходящимися на всей эллиптической орбите независимо от значения  $M_0$ . Величину  $e_X$  следует называть *пределом Холшевникова*.

Выше кривой  $M_R = \pi$  располагаются области сходимости лишь на части эллиптической орбиты. Если, например, эксцентриситет удовлетворяет неравенству  $e < 0.2$ , то, как видно из рис. 5, для значения  $M_0 = 0$  гарантирована сходимость на части орбиты чуть более 40% периода обращения, но с увеличением  $|M_0|$  до значений, соответствующих заштрихованной части рисунка, область сходимости увеличивается до полного (100%) периода.

На рис. 1.13 приведены круговые диаграммы угловых значений средней аномалии  $M$ , иллюстрирующие части эллиптической орбиты, на которых сходятся ряды (1.241, 1.242). Эти диаграммы иллюстрируют области сходимости на части эллиптической орбиты (области сходимости затенены). Можно заметить, что перицентр орбиты всегда расположен внутри области сходимости.

Особо следует отметить, что ряды (1.241, 1.242) будут сходящимися на всей эллиптической орбите для любых  $e <$

$< 1$ , если среднюю аномалию  $M_0$  в эпоху  $t_0$  положить равной  $\pi$ .

### 1.8.3.2 Окончательные результаты

Таким образом, можно сформулировать условия сходимости рядов (1.241, 1.242) по степеням средней аномалии в зависимости от величин  $M$ ,  $M_0$  и  $e$  в следующем виде:

- при значениях  $e$  и  $M_0$ , удовлетворяющих неравенству  $\sqrt{\beta^2 + M_0^2} > \pi$ , ряды сходятся абсолютно и равномерно на всей эллиптической орбите (на рис. 1.12 область сходимости заштрихована);

- в частном случае при  $0 \leq e < e_x$  ряды сходятся для любых  $M_0$  на всей эллиптической орбите, т. е. для  $-\pi \leq M \leq \pi$ ;

- в другом частном случае при  $M_0 = \pi$  ряды сходятся на всей эллиптической орбите для любых значений эксцентриситета  $0 \leq e < 1$ ;

- при значениях  $e$  и  $M_0$ , удовлетворяющих неравенству  $\sqrt{\beta^2 + M_0^2} < \pi$ , ряды сходятся только на некоторой части эллиптической орбиты (см. рис. 1.12).

Ряды по степеням средней аномалии (или времени) при  $e > 0$  сходятся только на конечном интервале значений средней аномалии. Но, если этот интервал охватывает период обращения по эллиптической орбите (т.е. больше  $2\pi$ ), то, учитывая  $2\pi$ -периодичность всех функций эллиптического движения, полученные с помощью рядов значения вычисляемых функций для одного периода можно использовать на всей числовой оси средней аномалии.

Вообще, разложения периодических функций в ряды по степеням независимой переменной не обязательно проводить на всей числовой оси этой переменной. Достаточно получить сходящиеся ряды только на интервале, равном одному периоду изменения независимой переменной, а вне этого интервала значения функций определять из условий их периодичности. В этом смысле степенные ряды для периодических функций, сходящиеся на одном периоде изменения их ар-

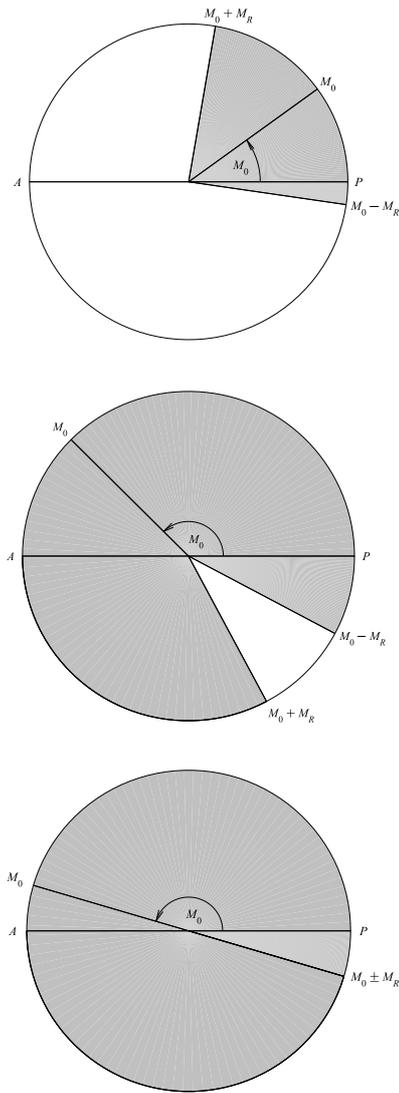


Рис. 1.13. Диаграммы областей сходимости на части эллиптической орбиты (области затенены). Обозначения:  $P$  - перигеум орбиты,  $A$  - апоцентр, верхняя диаграмма - для  $e = 0.5$ ,  $M_0 = 36^\circ$ , (сходимость на интервале  $-8^\circ.31 < M < 80^\circ.31$ ), средняя -  $e = 0.15$ ,  $M_0 = 135^\circ$ , ( $-28^\circ.05 < M < 298^\circ.05$ ), нижняя (на всей орбите) -  $e = 0.2$ ,  $M_0 = 163^\circ.53$ , ( $-16^\circ.47 < M < 343^\circ.53$ ).

гумента, эквивалентны степенным рядам для произвольных (непериодических) функций, сходящихся на всей числовой оси независимой переменной. Тем не менее, для степенных рядов периодических функций, сходящихся на одном периоде независимой переменной, не следует применять термин "сходимость на всей числовой оси", а использовать понятие "сходимости на всей эллиптической орбите", что и сделано выше.

Для рядов, сходящихся на некоторой части эллиптической орбиты, аналогичные результаты имеют место только на соответствующей части орбиты, периодически повторяющейся с периодом  $2\pi$  при неограниченном увеличении или уменьшении средней аномалии.

В эфемеридной астрономии ряды по степеням времени используются, например, при определении предварительных орбит малых планет и комет по астрометрическим наблюдениям.

#### 1.8.4 Замечание о регуляризации

Как видно из предыдущего раздела, сходимости рядов по степеням времени мешают особые точки, соответствующие моментам соударения тел. Возникает вопрос: нельзя ли с помощью какого-то преобразования освободиться от этого затруднения? Оказывается, что соответствующее преобразование существует. Его называют *регуляризирующим преобразованием*, а саму процедуру - *регуляризацией*. Различают: регуляризацию решений и регуляризацию уравнений движения. Регулярность решений означает, что траектории движения не имеют особых точек, а регулярность уравнений движения означает отсутствие особенностей в самих уравнениях движения. Различие в этих понятиях видно из следующего примера.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(1 - \cos t)\ddot{x} - \dot{x} \sin t + x = 0. \quad (1.250)$$

Правая часть этого уравнения (после его разрешения относительно второй производной) имеет особенность, так как знаменатель содержит множитель  $1 - \cos t$ , т.е. уравнение является сингулярным. Общее решение этого уравнения, напротив, является регулярным. Действительно проверкой можно убедиться, что частными решениями этого уравнения являются  $(1 - \cos t)$  и  $\sin t$ , а общее решение имеет вид  $x = C_1(1 - \cos t) + C_2 \sin t$ , т.е. решения уравнения (1.250) всюду регулярны.

Этот пример показывает важность процесса регуляризации уравнений движения при проведении вычислений, так как никакая вычислительная машина при проведении численного интегрирования не сможет пройти особую точку  $t = 0$ , несмотря на регулярность решения.

Далее ограничимся рассмотрением только прямолинейного движения, для которого трансверсальная составляющая скорости отсутствует ( $V = \dot{r}$ ). Исходное дифференциальное уравнение движения  $\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3$  в случае радиального прямолинейного движения имеет вид

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1.251)$$

и допускает интеграл энергии

$$\dot{r}^2 - \frac{2\mu}{r} = h, \quad (1.252)$$

последующим интегрированием которого при  $h = 0$  и  $\tau = 0$  для радиуса  $r$  получается явное выражение (1.178), содержащее особенность (точку возврата) при  $t = 0$ , в виде:

$$r = \sqrt[3]{\frac{9\mu}{2} t^{2/3}}. \quad (1.253)$$

Сначала проведем регуляризацию решений дифференциального уравнения (1.251). Введем вместо  $t$  регуляризирующую переменную  $s$  по формулам:

$$(\quad)' = \frac{d}{ds} = r \frac{d}{dt}, \quad \dot{r} = \frac{1}{r} r', \quad \ddot{r} = -\frac{1}{r^3} r'^2 + \frac{1}{r^2} r''. \quad (1.254)$$

Тогда уравнение (1.251) после преобразования к независимой переменной  $s$  запишется в виде

$$rr'' - r'^2 + \mu r = 0, \quad (1.255)$$

откуда (в случае  $h = 0$ ) получим регулярное решение

$$r = \frac{\mu s^2}{2}, \quad t = \frac{\mu s^3}{6}, \quad (1.256)$$

в то время как уравнение (1.255) остается сингулярным с особенностью типа полюса в точке  $r = 0$ , что видно после деления на множитель  $r$  при старшей производной.

Для регуляризации уравнения (1.255) подставим вместо величины  $r'^2$  ее выражение из интеграла энергии

$$r'^2 = 2\mu r + hr^2. \quad (1.257)$$

Тогда получим регулярное дифференциальное уравнение для прямолинейного движения в задаче двух тел

$$r'' - hr = \mu. \quad (1.258)$$

Другим примером регуляризирующего преобразования является преобразование (1.100) при выводе уравнения Бине (1.101).

В заключение следует заметить, что регуляризация уравнений движения играет большую роль не только для получения сходящихся рядов, но и просто при вычислении любых траекторий, проходящих достаточно близко от центра тяготения. Дело в том, что хотя соударения в этом случае не происходит, но правые части уравнений движения становятся очень большими, из-за чего происходит резкая потеря точности вычислений. Такая ситуация имеет место не только в задаче двух тел, но и в задаче многих тел при тесном сближении хотя бы одной пары тел. Неприятностей, связанных с тесным сближением, как правило, можно избежать, если осуществить регуляризацию дифференциальных уравнений движения.

Детальное обсуждение проблемы регуляризации содержится в книге Штифеля и Шейфеле "Регулярная небесная механика" [14].

## 1.9 Неравенство Зундмана

Неравенство Зундмана записывается в барицентрической системе координат, поэтому воспользуемся первыми интегралами дифференциальных уравнений (1.30). Интегралы движения центра масс, энергии и момента количества движения таковы

$$\begin{aligned} m_0 \vec{s}_0 + m \vec{s} &= 0, & m_0 \dot{\vec{s}}_0 + m \dot{\vec{s}} &= 0, \\ T - \frac{f m_0 m}{r} &= h_a, & m_0 \vec{s}_0 \times \dot{\vec{s}}_0 + m \vec{s} \times \dot{\vec{s}} &= \vec{c}_a, \end{aligned} \quad (1.259)$$

где  $T = (m_0 \dot{\vec{s}}_0^2 + m \dot{\vec{s}}^2)/2$  - кинетическая энергия системы двух тел в барицентрической системе координат,  $\vec{r} = \vec{s} - \vec{s}_0$ ,  $r = |\vec{r}|$ , а величины  $h_a$  и  $c_a$  связаны с  $h$  и  $c$  соотношениями (1.113).

Момент инерции  $I$  двух точечных тел  $M_0$  и  $M$  относительно их барицентра

$$I = m_0 \vec{s}_0^2 + m \vec{s}^2 \quad (1.260)$$

с помощью формул (1.29), т.е.  $\vec{s}_0 = -m\vec{r}/(m_0 + m)$  и  $\vec{s} = m_0\vec{r}/(m_0 + m)$ , можно представить в виде

$$I = m_0 \vec{s}_0^2 + m \vec{s}^2 = \frac{m_0 m}{m_0 + m} \vec{r}^2. \quad (1.261)$$

Аналогично с помощью формул  $\dot{\vec{s}}_0 = -m\dot{\vec{r}}/(m_0 + m)$  и  $\dot{\vec{s}} = m_0\dot{\vec{r}}/(m_0 + m)$  можно преобразовать "живую силу"  $2T$ , т.е. удвоенную кинетическую энергию:

$$2T = m_0 \dot{\vec{s}}_0^2 + m \dot{\vec{s}}^2 = \frac{m_0 m}{m_0 + m} \dot{\vec{r}}^2. \quad (1.262)$$

Тогда с помощью (1.261) и (1.262) произведение  $IT$  представимо в виде

$$IT = \frac{1}{2} \left( \frac{m_0 m}{m_0 + m} \right)^2 \vec{r}^2 \dot{\vec{r}}^2. \quad (1.263)$$

Таким же образом с помощью формул (1.29) можно преобразовать квадрат момента количества движения:

$$\begin{aligned} & (m_0 \vec{s}_0 \times \dot{\vec{s}}_0 + m \vec{s} \times \dot{\vec{s}})^2 = \\ & = \left( \frac{m_0 m}{m_0 + m} \right)^2 (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = \vec{c}_a^2 = \left( \frac{m_0 m}{m_0 + m} \right)^2 c^2. \end{aligned} \quad (1.264)$$

Сравнивая (1.263) и (1.264) и учитывая неравенство  $\vec{r}^2 \dot{\vec{r}}^2 \geq (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = \vec{r}^2 \dot{\vec{r}}^2 (\sin \theta)^2$ , где  $\theta$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$ , получим

$$c_a^2 \leq \left( \frac{m_0 m}{m_0 + m} \right)^2 \vec{r}^2 \dot{\vec{r}}^2 \quad (1.265)$$

а затем неравенство

$$IT \geq \frac{c_a^2}{2}, \quad (1.266)$$

которое и есть неравенство Зундмана для задачи двух тел.

С помощью этого неравенства можно установить границы возможного изменения взаимного расстояния  $r$ . Для этого в неравенство Зундмана вместо  $I$  и  $T$  подставим их выражения из (1.261) и (1.262), а для  $c_a$  воспользуемся зависимостью (1.113) при  $\vec{a} = \vec{b} = 0$ :

$$\frac{m_0 m}{m_0 + m} r^2 \left( \frac{f m_0 m}{r} + \frac{m_0 m}{2(m_0 + m)} h \right) \geq \left( \frac{m_0 m}{m_0 + m} \right)^2 \frac{c^2}{2} \quad (1.267)$$

После несложных преобразований это неравенство запишем в виде

$$hr^2 + 2f(m_0 + m)r \geq c^2. \quad (1.268)$$

Границами изменения радиуса  $r$  являются корни квадратного уравнения

$$hr^2 + 2f(m_0 + m)r - c^2 = 0, \quad (1.269)$$

которые записываются в виде

$$r^{(1,2)} = -\frac{f(m_0 + m)}{h} \mp \sqrt{\frac{f^2(m_0 + m)^2}{h^2} + \frac{c^2}{h}}. \quad (1.270)$$

Если использовать соотношения  $\mu = f(m_0 + m)$ ,  $\lambda/\mu = e$ ,  $\mu^2/h^2 = a^2$  и  $\lambda^2 = \mu^2 + hc^2$ , то корни  $r^{(1)}$  и  $r^{(2)}$  представимы в виде

$$r^{(1)} = -\frac{\mu}{h} - \sqrt{D}, \quad r^{(2)} = -\frac{\mu}{h} + \sqrt{D}, \quad (1.271)$$

где

$$D = \frac{\mu^2}{h^2} + \frac{c^2}{h} = \frac{\lambda^2}{h^2} = a^2 e^2. \quad (1.272)$$

Для эллиптического движения ( $h < 0$ ) корни  $r^{(1)}$  и  $r^{(2)}$  определяют минимальное (в перигентре) и максимальное (в апоцентре) удаление тела  $M$  от  $M_0$ :

$$r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)} \quad \text{или} \quad a(1 - e) \leq r \leq a(1 + e), \quad (1.273)$$

где  $a$  и  $e$  - большая полуось и эксцентриситет эллиптической орбиты.

Для гиперболического движения ( $h > 0$ ) корень  $r^{(1)} < 0$  не имеет физического смысла, а диапазон изменения  $r$  определяется неравенствами

$$r^{(2)} = a(e - 1) \leq r < \infty, \quad (1.274)$$

где  $a$  - действительная полуось гиперболы.

Для параболического движения ( $h = 0$ ) непосредственно из (1.268) получим

$$\frac{p}{2} = \frac{c^2}{2\mu} \leq r < \infty. \quad (1.275)$$

Обратим внимание на то, что неравенство Зундмана налагает ограничение на постоянные интеграла энергии  $h$  и интеграла площадей  $c$  в виде требования неотрицательности дискриминанта  $D$

$$D = \frac{\mu^2}{h^2} + \frac{c^2}{h} \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad hc^2 \geq -\mu^2, \quad (1.276)$$

что соответствует очевидным неравенствам  $\lambda^2 = \mu^2 e^2 \geq 0$  или  $p \leq a$  при  $e < 1$  и  $p \geq a$  при  $e > 1$ .

## 1.10 Задача двух тел с переменными массами

Для многих астрономических задач необходимо учитывать изменение массы притягивающихся тел. Впервые в небесной механике задачу об относительном движении тел с переменными массами поставил в конце XIX века российский астроном Хуго Гильден, записавший дифференциальные уравнения в таком же виде, как и для тел с постоянными массами:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu(t)}{r^3}\vec{r}, \quad (1.277)$$

где  $\mu(t) = f[m_0(t) + m(t)]$  - переменный гравитационный параметр тел  $M_0$  и  $M$ .

Строгий вывод уравнений движения этой задачи осуществил в начале XX века И.В.Мещерский. Рассмотрим этот вывод для тела  $M$  с массой  $m(t)$ . Для этого следует воспользоваться вторым законом механики в оригинальной формулировке Ньютона: изменение количества движения тела равно импульсу равнодействующей внешних сил. Чаще этот закон известен в другой форме: произведение массы на ускорение равно действующей силе. Однако эта формулировка справедлива только для тел с постоянными массами. Если же массы зависят от времени, то следует пользоваться первоначальной формулировкой Ньютона.

Для дальнейших рассуждений чрезвычайно существенно предположение о том, что частица  $\Delta m$ , покинувшая тело, перестает быть частью этого тела и никакого влияния на него в дальнейшем не оказывает. Обозначим количество движения тела  $M$  через  $\vec{Q} = m\vec{V}$ . Тогда второй закон механики запишем в виде

$$\Delta\vec{Q} = \vec{F}\Delta t, \quad \Delta\vec{Q} = (m + \Delta m)(\vec{V} + \Delta\vec{V}) - m\vec{V} - \Delta m\vec{u}, \quad (1.278)$$

где  $\vec{u}$  - абсолютная скорость покинувшей тело  $M$  частицы с массой  $\Delta m$ , а  $\vec{F}$  - равнодействующая всех внешних сил. Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е. заменяя приращения диф-

ференциалами, и учитывая, что  $\Delta m \Delta \vec{V} / \Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , а  $m(t)$  является дифференцируемой функцией времени  $t$ , получим уравнение Мещерского

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{w} \frac{dm}{dt}, \quad (1.279)$$

где  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{V}$  - относительная скорость истечения частиц вещества, а произведение  $\vec{w} \frac{dm}{dt}$  определяет реактивную силу.

Уравнение Мещерского используется в ракетодинамике при изучении движения ракеты с работающим двигателем и потерей массы вследствие истечения вещества из сопла двигателя ракеты. Реактивная сила для ракеты является силой тяги двигателя.

В астрономии наряду с уменьшением массы небесного тела (для звезды, например, из-за звездного ветра) может происходить ее увеличение, вследствие "налипания" частиц при движении тела внутри пылевого облака.

Уравнения Мещерского абсолютного движения в задаче двух тел  $M_0$  и  $M$  с переменными массами  $m_0(t)$  и  $m(t)$  записываются в виде

$$m_0 \ddot{\rho}_0 = f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r} + \vec{w}_0 \frac{dm_0}{dt}, \quad m \ddot{\rho} = -f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r} + \vec{w} \frac{dm}{dt}, \quad (1.280)$$

или, учитывая, что  $\vec{w}_0 = \vec{u}_0 - \vec{V}_0$  и  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{V}$ , в виде

$$\frac{d}{dt}(m_0 \vec{V}_0) = f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r} + \vec{u}_0 \frac{dm_0}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(m \vec{V}) = -f \frac{m_0 m}{r^3} \vec{r} + \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (1.281)$$

А уравнение Мещерского для относительного движения тела  $M$  относительно  $M_0$  будет

$$\ddot{\vec{r}} = -f \frac{m_0 + m}{r^3} \vec{r} + \frac{\vec{w}}{m} \frac{dm}{dt} - \frac{\vec{w}_0}{m_0} \frac{dm_0}{dt}. \quad (1.282)$$

В задаче двух тел в случае выброса или притока частиц с нулевой равнодействующей реактивных сил, в частности,

при изотропной потере массы, т.е. одинаковой интенсивности истечения массы во всех направлениях, дифференциальные уравнения абсолютного движения тел с переменными массами имеют вид (1.5),

$$m_0(t)\ddot{\vec{\rho}}_0 = f \frac{m_0(t)m(t)}{r^3} \vec{r}, \quad m(t)\ddot{\vec{\rho}} = -f \frac{m_0(t)m(t)}{r^3} \vec{r}, \quad (1.283)$$

где  $\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0$ .

Векторное уравнение движения тела  $M$  относительно тела  $M_0$  предстанет в виде

$$\ddot{\vec{r}} = -f \frac{m_0 + m}{r^3} \vec{r}. \quad (1.284)$$

Уравнение (1.284), используемое Гильденом и строго выведенное Мещерским, называется *уравнением Гильдена-Мещерского*. Это уравнение в случае произвольного закона изменения массы относится к числу неинтегрируемых. Более того, в общем случае не существуют даже отдельные первые интегралы, аналогичные интегралам движения центра масс, интегралам площадей, энергии и Лапласа. Однако известны отдельные законы изменения масс (Мещерского и Гельфгата), при которых задача двух тел с переменными массами интегрируется в квадратурах.

Кроме того, уравнение (1.284) интегрируется в случае перетекания массы с одного тела на другое при отсутствии реактивных сил, т.е. при условии неизменности общей массы, когда  $m_0(t) + m(t) = \text{const}$ . Такую задачу называют *консервативной* задачей двух тел с переменными массами. Уравнение Гильдена-Мещерского (1.284) для этого случая точно совпадает с уравнением относительного движения тел с постоянными массами и с той же суммарной массой. Поэтому для консервативной задачи можно использовать общее решение для относительного движения в задаче двух тел с постоянными массами (1.92). Эту задачу можно использовать в качестве промежуточного решения (первого приближения) при изучении движений звезд в тесных двойных системах с *консервативным обменом* массой.

Кроме уравнения Гильдена-Мещерского в астрономии используются другие уравнения задачи двух тел с переменными массами  $m_0 = m_0(t)$  и  $m = m(t)$ . Это, в первую очередь, уравнения Мещерского-Леви-Чивиты

$$\frac{d}{dt}(m_0\vec{V}_0) = f\frac{m_0m}{r^3}\vec{r}, \quad \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = -f\frac{m_0m}{r^3}\vec{r}, \quad (1.285)$$

допускающие существование интегралов количества движения и момента количества движения

$$m_0\vec{V}_0 + m\vec{V} = \vec{a}, \quad m_0\vec{\rho}_0 \times \vec{V}_0 + m\vec{\rho} \times \vec{V} = \vec{c}. \quad (1.286)$$

Никаких других первых интегралов эти уравнения не допускают.

Уравнения Мещерского-Леви-Чивиты при  $\dot{m}_0 > 0$  и  $\dot{m} > 0$  используют, например, при изучении движений двойной звездной системы, находящейся в газо-пылевом облаке или в туманности в случае налипания вещества на обе звезды.

Существование интегралов количества и момента количества движения сыграло с уравнением Мещерского-Леви-Чивиты "злую шутку". Делая априорное предположение о существовании интеграла момента количества движения в задаче об определении относительного движения звезд в тесной двойной системе с консервативным обменом массой, невольно используется модель Мещерского-Леви-Чивиты, так как ни в каких других случаях общие уравнения Мещерского (1.280) таких интегралов не допускают. Но в модели Мещерского-Леви-Чивиты сразу получаем парадоксальный результат, что истечение вещества со звезды-донора якобы происходит не через окрестность особой точки полости Роша и со скоростью, близкой к скорости звука в сторону второй звезды, а со скоростью, по величине равной скорости движения звезды, но противоположно направленной (т.е. со скоростью "налипания" вещества из неподвижного пылевого облака). Эта некорректная модель используется уже более полувека и по сей день.

## Глава 2

# ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

### 2.1 Уравнения абсолютного движения задачи многих тел

Задачей многих тел называется задача о движении системы конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Рассмотрим систему  $n+1$  тел-точек  $M_0, M_1, \dots, M_n$  с массами  $m_0, m_1, \dots, m_n$  соответственно. В абсолютной системе декартовых координат  $OXYZ$  с началом в фиксированной точке  $O$  и неизменной ориентацией координатных осей тело  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) с массой  $m_i$  имеет координаты  $X_i, Y_i, Z_i$ .

Сила притяжения  $\vec{F}_{ij}$  тела  $M_i$  телом  $M_j$  и равнодействующая  $\vec{F}_i$  всех сил, действующих на тело  $M_i$  со стороны других тел системы запишутся в виде

$$\vec{F}_{ij} = \frac{f m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, \quad \vec{F}_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{r}_{ij} &= \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i, \quad \vec{\rho}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}, \\ r_{ij} &= \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения движения тогда можно записать в координатной или векторной форме соответственно:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 X_i}{dt^2} &= f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{X_j - X_i}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{d^2 Y_i}{dt^2} &= f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{Y_j - Y_i}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{d^2 Z_i}{dt^2} &= f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{Z_j - Z_i}{r_{ij}^3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$m_i \frac{d^2 \vec{\rho}_i}{dt^2} = f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{r_{ij}^3}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

Если ввести силовую функцию взаимного притяжения рассматриваемой системы тел

$$U = \frac{f}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = f \sum_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (2.5)$$

то векторное и скалярные уравнения движения перепишутся в виде

$$m_i \frac{d^2 \vec{\rho}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_i} = \text{grad}_{\vec{\rho}_i} U, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (2.6)$$

$$m_i \frac{d^2 X_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial X_i}, \quad m_i \frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Y_i}, \quad m_i \frac{d^2 Z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Z_i}. \quad (2.7)$$

Силовая функция  $U$  и потенциальная энергия притяжения  $\Pi$  системы гравитирующих тел различаются знаком, то есть

$$\Pi = -U. \quad (2.8)$$

Порядок выписанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений движения равен  $6n + 6$ . При  $n = 1$  получим уравнения рассмотренной ранее задачи двух тел. В этой главе будем считать, что  $n > 1$ .

Все силы в дифференциальных уравнениях движения задачи многих тел не зависят явно от времени. Кроме того, в силу третьего закона механики - действие равно противодействию, все силы притяжения входят в уравнения движения парами, равными друг другу по величине, но противоположно направленными. В теоретической механике такие силы называют *внутренними*, а соответствующие механические системы - *замкнутыми*, подчеркивая этим отсутствие *внешних* сил. Сумма всех сил, а также сумма всех моментов сил относительно произвольной фиксированной точки, в замкнутой системе всегда равна нулю.

## 2.2 Десять классических первых интегралов в задаче многих тел

До сих пор получить в конечном виде общее решение или общий интеграл задачи многих тел никому не удалось. Однако известны десять классических первых интегралов, которые дают важную информацию о свойствах движений небесных тел.

### 2.2.1 Интегралы движения центра масс

Просуммируем по индексу  $i$  уравнения движения (2.4). В правой части результирующего равенства вследствие за-

мкнутости системы получится нуль:

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = 0. \quad (2.9)$$

Дважды интегрируя это векторное уравнение, последовательно получим два векторных (или шесть скалярных) первых интегралов

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{a}, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i = \vec{a}t + \vec{b}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad (2.11)$$

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - векторные произвольные постоянные.

Эти интегралы определяют абсолютное движение центра масс системы гравитирующих тел. Действительно, в абсолютной системе координат  $OXYZ$  положение  $\vec{\rho}_G$  и скорость  $\dot{\vec{\rho}}_G$  барицентра определяются равенствами:

$$\vec{\rho}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i = \frac{\vec{a}}{m}t + \frac{\vec{b}}{m}, \quad \dot{\vec{\rho}}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \frac{\vec{a}}{m}, \quad (2.12)$$

где  $m = m_0 + m_1 + \dots + m_n$  - сумма масс всех тел системы.

Из этих интегралов видно, что центр масс  $G$  изолированной системы небесных тел движется прямолинейно и равномерно. В частном случае при  $\vec{a} = 0$  и  $\vec{b} = 0$  барицентр  $G$  остается неподвижным и располагается в начале координат абсолютной системы  $OXYZ$ .

Интегралы движения центра масс позволяют определить, например, движение Солнца относительно группы ближайших звезд. Пусть  $M_0$  - Солнце, а  $M_1, \dots, M_n$  - рассматриваемая группа звезд. В барицентрической системе имеем

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\vec{\rho}}_0 = -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i. \quad (2.13)$$

Последнее соотношение позволяет определить скорость движения Солнца, если известны скорости движения и массы группы ближайших звезд. Таким путем было установлено, что Солнечная система движется в направлении созвездия Геркулеса со скоростью 19,5 км/с, а апекс этого движения имеет прямое восхождение  $\alpha = 270^\circ$  и склонение  $\delta = +30^\circ$ .

### 2.2.2 Интегралы площадей

Так как силы взаимного притяжения тел удовлетворяют правилу - "действие равно противодействию", то сумма моментов всех сил относительно какой-либо неподвижной точки (например, начала координат абсолютной системы  $O$ ) равна нулю. Следовательно, после умножения уравнений движения (2.4) векторно слева на радиус-вектор  $\vec{\rho}_i$  и последующего суммирования по индексу  $i$ , получим равенство

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i = \vec{0}, \quad (2.14)$$

интегрируя которое приходим к интегралу площадей в векторном виде

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{c}, \quad \text{где} \quad \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}. \quad (2.15)$$

Смысл названия связан с тем, что величина  $\vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i$  представляет собой удвоенную мгновенную секторную скорость тела  $M_i$ .

Интегралы площадей (2.15) дают возможность построить неподвижную плоскость, проходящую через центр масс и перпендикулярную к вектору  $\vec{c}$ :

$$\vec{c}(\vec{\rho} - \vec{\rho}_G) = c_1(X - X_G) + c_2(Y - Y_G) + c_3(Z - Z_G) = 0. \quad (2.16)$$

Эта плоскость получила название *неизменной плоскости Лапласа*.

Для Солнечной системы эта плоскость относительно эклиптики и равноденствия 1950.0 определяется долготой  $\Omega = 107^\circ 13'$  и наклоном  $I = 1^\circ 39'$ .

Неизменная плоскость Лапласа, называемая также инвариантной барицентрической плоскостью Лапласа, имеет большое значение в теоретических исследованиях. Однако использовать эту плоскость в качестве основной плоскости системы отсчета в эфемеридной астрономии невозможно, так как точность ее определения недопустимо низка, что обусловлено многими причинами, среди которых основной является низкая точность знания масс тел.

### 2.2.3 Интеграл энергии

Умножив уравнение (2.6) скалярно на вектор  $\dot{\rho}_i$  и просуммировав по индексу  $i$ , получим равенство:

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\rho}_i \ddot{\rho}_i = \sum_{i=0}^n \dot{\rho}_i \frac{\partial U}{\partial \rho_i}. \quad (2.17)$$

Отсюда, учитывая, что  $\partial U / \partial t = 0$  - силовая функция не зависит явно от времени, получим интеграл энергии в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\rho}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2) = U + h, \quad (2.18)$$

где  $h$  - постоянная энергии,  $T$  - кинетическая энергия системы небесных тел. Интеграл (2.18) показывает, что полная механическая энергия системы остается неизменной  $T + \Pi = h$ . Такие системы тел в механике называют *консервативными*.

Мы вывели десять классических интегралов задачи многих тел с независимыми произвольными постоянными:  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, h$ . Однако эти интегралы не дают возможности построить общий интеграл уравнений движения и получить общее решение даже для задачи трех тел,

общий интеграл которой состоит из 18 независимых первых интегралов.

Теорема Коши существования решений системы дифференциальных уравнений движения утверждает, что для регулярных правых частей дифференциальных уравнений общее решение обязательно существует, по крайней мере, на конечном интервале времени вплоть до первого соударения тел. Однако, несмотря на многочисленные безуспешные попытки многих знаменитых математиков, механиков и астрономов, до сих пор не найдено даже одного первого интеграла, отличного от классических.

Подобные попытки резко сократились, хотя и не прекратились, после того, как в 1887 г. Брунс доказал, что в задаче трех тел не существует никаких других интегралов, левые части которых были бы алгебраическими функциями координат и скоростей. В 1889 г. Пуанкаре показал, что в задаче трех тел не существует также однозначных трансцендентных интегралов. А затем Пенлеве показал, что не существуют алгебраические интегралы относительно координат и скоростей в задаче многих тел. Безрезультатными остались также попытки отыскания новых первых интегралов на компьютерах.

Поэтому, если даже будет найден какой-либо новый интеграл, то он, по-видимому, будет представляться неоднозначными, трансцендентными и неудобными для проведения вычислений функциями координат и составляющих скоростей.

## 2.3 Уравнения барицентрического движения

Осуществим переход от абсолютной системы  $OXYZ$  к барицентрической  $GX'Y'Z'$  путем замены переменных по формулам

$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_G + \vec{s}_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (2.19)$$

где  $\vec{\rho}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}$ ,  $\vec{\rho}_G = \{X_G, Y_G, Z_G\}$  и  $\vec{s}_i = \{X'_i, Y'_i, Z'_i\}$ .

Оси координат барицентрической системы всегда имеют неизменное направление и остаются параллельными соответствующим осям абсолютной системы, а начало координат  $G$  движется равномерно и прямолинейно в соответствии с формулами (2.12). Это означает, что барицентрическая система координат является инерциальной системой.

Учитывая, что в соответствии с первой формулой в системе (2.12) вторая производная линейно зависящего от времени вектора  $\vec{\rho}_G$  равна нулю  $\ddot{\vec{\rho}}_G = 0$ , получим уравнения барицентрического движения той же структуры, что и уравнения абсолютного движения:

$$m_i \ddot{\vec{s}}_i = f \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{s}_j - \vec{s}_i}{r_{ij}^3}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.20)$$

Интегралы движения центра масс в барицентрической системе координат  $GX'Y'Z'$  примут тривиальный вид, так как центр масс  $G$  всегда расположен в начале координат:

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i = 0. \quad (2.21)$$

В силу соотношений (2.12), (2.15), (2.19) и (2.21) интегралы площадей запишутся

$$\vec{c} = \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i \times \dot{\vec{s}}_i + \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_G \times \dot{\vec{\rho}}_G = \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i \times \dot{\vec{s}}_i + \frac{1}{m} (\vec{a}t + \vec{b}) \times \vec{a} \quad (2.22)$$

или в виде

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i \times \dot{\vec{s}}_i = \vec{c}', \quad \text{где} \quad \vec{c}' = \vec{c} + \frac{1}{m} \vec{a} \times \vec{b}. \quad (2.23)$$

Здесь  $m = \sum_{i=0}^n m_i$  означает полную массу системы тел.

Аналогично, учитывая (2.12), (2.19) и (2.21), можно записать интеграл энергии

$$\begin{aligned} U + h = T &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i^2 + \dot{\rho}_G \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i + \frac{1}{2} \dot{\rho}_G^2 \sum_{i=0}^n m_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i^2 + \frac{1}{2m} \dot{a}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

или в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i^2 = U + h', \quad \text{где} \quad h' = h - \frac{a^2}{2m}. \quad (2.25)$$

Интеграл энергии в виде (2.25) можно записать сразу, опираясь на известную в теоретической механике теорему Кенига, гласящую: кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии ее центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс.

Аналогично, соотношение (2.23) можно получить из другой теоремы теоретической механики, согласно которой кинетический момент системы равен кинетическому моменту центра масс, предполагая, что в нем сосредоточена вся масса системы, сложенному с кинетическим моментом в движении относительно центра масс.

С помощью интегралов движения центра масс (2.21) можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений на шесть единиц. Для этого из интегралов движения центра масс нужно выразить координаты  $\vec{s}_0$  и скорости  $\dot{\vec{s}}_0$  тела  $M_0$  и подставить их в уравнения движения (2.20).

Новые уравнения движения уже не будут допускать интегралов движения центра масс. Но интегралы площадей и энергии сохраняются. Их можно получить из интегралов (2.23, 2.25), если вместо  $\vec{s}_0$  и  $\dot{\vec{s}}_0$  подставить их выражения из интегралов движения центра масс (2.21).

## 2.4 Уравнение Лагранжа-Якоби

После скалярного умножения дифференциальных уравнений движения (2.6) на радиус-вектор  $\vec{\rho}_i$  с последующим суммированием по индексу  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  приходим к следующему равенству:

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i \ddot{\rho}_i = \sum_{i=0}^n \vec{\rho}_i \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_i}. \quad (2.26)$$

Легко убедиться, что силовая функция (2.5) является однородной функцией своих аргументов степени  $k = -1$ , то есть выполняется равенство

$$U(\lambda \vec{\rho}_0, \lambda \vec{\rho}_1, \dots, \lambda \vec{\rho}_n) = \lambda^k U(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}_1, \dots, \vec{\rho}_n), \quad (2.27)$$

где  $k = -1$ , а  $\lambda$  - произвольное число.

Дифференцируя уравнение (2.27) по  $\lambda$  и затем подставляя  $\lambda = 1$  и  $k = -1$ , получим равенство

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_0} \vec{\rho}_0 + \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_1} \vec{\rho}_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_n} \vec{\rho}_n = -U \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_i} \vec{\rho}_i = -U, \quad (2.28)$$

которое является утверждением теоремы Эйлера об однородных функциях для частного значения степени однородности  $k = -1$ .

Сложив почленно удвоенный интеграл энергии (2.18) с равенством (2.26) с учетом (2.28), в результате получим, что

$$\sum_{i=0}^n m_i (\vec{\rho}_i \ddot{\rho}_i + \dot{\rho}_i^2) = U + 2h. \quad (2.29)$$

Левая часть уравнения (2.29) может быть представлена в форме

$$\sum_{i=0}^n m_i (\vec{\rho}_i \ddot{\rho}_i + \dot{\rho}_i^2) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i \dot{\rho}_i = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^n m_i \rho_i^2. \quad (2.30)$$

Равенства (2.29) и (2.30) в совокупности дают:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2 = 2U + 4h. \quad (2.31)$$

Обозначив в (2.31) через  $I$  полный момент инерции системы относительно начала координат системы  $OXYZ$

$$I = \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2, \quad (2.32)$$

приходим к дифференциальному соотношению

$$\ddot{I} = 2U + 4h, \quad (2.33)$$

известному в астрономии как уравнение Лагранжа-Якоби. Для случая системы трех тел его получил Ж.Л.Лагранж, а К.Якоби обобщил это уравнение на случай произвольного, конечного числа активно гравитирующих тел.

Однако использовать уравнение Лагранжа-Якоби в качестве дифференциального уравнения можно только при его решении (например, численном) совместно с полной системой дифференциальных уравнений движения. Но тогда задача получения решения уравнения Лагранжа-Якоби теряет смысл, ибо знание решения уравнений движения сразу позволяет вычислить любые моменты инерции. Поэтому соотношение (2.33) называют также формулой Лагранжа-Якоби.

Момент инерции  $I = \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2$  относительно начала координат абсолютной системы  $OXYZ$  можно связать с моментом инерции  $I_G = \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i^2$  относительно начала барицентрической системы

$GX'Y'Z'$ . Для этого из тождественного соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \vec{r}_{ij}^2 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j (\vec{\rho}_i^2 - 2\vec{\rho}_i \vec{\rho}_j + \vec{\rho}_j^2) = \\ &= m \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2 - 2 \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i \sum_{j=0}^n m_j \vec{\rho}_j + m \sum_{j=0}^n m_j \vec{\rho}_j^2 = \\ &= 2m \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2 - 2m^2 \vec{\rho}_G^2 = 2mI - 2(\vec{a}t + \vec{b})^2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

для момента инерции  $I$  получим выражение

$$I = \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \vec{r}_{ij}^2 + \frac{1}{m} (\vec{a}t + \vec{b})^2, \quad (2.35)$$

которое с помощью замены  $\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_G + \vec{s}_i$ ,  $\vec{r}_{ij} = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i = \vec{s}_j - \vec{s}_i$  преобразуем к виду

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^n m_i (\vec{\rho}_G + \vec{s}_i)^2 = \vec{\rho}_G^2 \sum_{i=0}^n m_i + 2\vec{\rho}_G \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i + \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i^2 = \\ &= \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i^2 + \frac{1}{m} (\vec{a}t + \vec{b})^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Момент инерции  $I_G$  в барицентрической системе координат примет вид

$$I_G = \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i^2 = I - \frac{1}{m} (\vec{a}t + \vec{b})^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \vec{r}_{ij}^2. \quad (2.37)$$

Зависимость

$$I = I_G + \frac{1}{m} (\vec{a}t + \vec{b})^2 \quad (2.38)$$

можно получить непосредственно из известной в теоретической механике теоремы, согласно которой момент инерции относительно любой точки (полюса) равен моменту инерции относительно центра масс, сложенному с моментом инерции

самого центра масс относительно выбранного полюса в предположении, что вся масса системы находится в центре масс.

После вычисления второй производной из (2.38) получим связь

$$\ddot{I} = \ddot{I}_G + \frac{2}{m}\ddot{a}^2. \quad (2.39)$$

Если, кроме того, перейти к барицентрической постоянной интеграла энергии  $h'$  по формуле (2.25), то уравнение Лагранжа-Якоби (2.33) переписется в окончательном виде

$$\ddot{I}_G = 2U + 4h', \quad \text{где} \quad h' = h - \frac{a^2}{2m}. \quad (2.40)$$

Уравнение Лагранжа-Якоби широко используется в астрономии. С его помощью можно получить достаточное условие распада системы небесных тел - ухода хотя бы одного тела из системы. Действительно, если для какой-либо системы тел выполняется условие  $h' \geq 0$ , то согласно (2.40) это условие приводит к монотонному и неограниченному возрастанию момента инерции  $I_G$ , что возможно только при монотонном увеличении одного или нескольких взаимных расстояний  $r_{ij}$ , т.е. хотя бы одно тело покидает систему при  $t \rightarrow \infty$ . Такие движения тел называют неустойчивыми по Лагранжу (для них не существует конечной замкнутой области пространства, в которой находились бы все тела системы).

Если же выполняется условие  $h' < 0$ , то получить окончательный результат об устойчивости системы тел из уравнения (2.40) не удастся - возможны как устойчивые движения в смысле Лагранжа, так и неустойчивые. Поэтому условие  $h' < 0$  является лишь необходимым условием устойчивости системы гравитирующих тел.

## 2.5 Теорема о вириале

Замкнутая система  $n + 1$  точечных масс  $m_i$ , подверженных воздействию сил  $\vec{F}_i$  произвольной природы, в бари-

центрической системе координат  $GX'Y'Z'$  описывается дифференциальными уравнениями движения

$$m_i \ddot{\vec{s}}_i = \vec{F}_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.41)$$

После скалярного умножения уравнений (2.41) на барицентрический радиус-вектор  $\vec{s}_i$  и суммирования по всем телам, получается равенство

$$\sum_{i=0}^n m_i (\vec{s}_i \ddot{\vec{s}}_i) = \sum_{i=0}^n \vec{s}_i \vec{F}_i. \quad (2.42)$$

В механике систем материальных точек величина

$$V = \sum_{i=0}^n \vec{s}_i \vec{F}_i \quad (2.43)$$

является энергетической характеристикой механической системы и называется *вириалом Клаузиуса*.

Учитывая соотношения  $\vec{s} \ddot{\vec{s}} = \frac{d}{dt}(\vec{s} \dot{\vec{s}}) - \dot{\vec{s}}^2$  и  $\vec{s} \ddot{\vec{s}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{s}}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{s}^2)$ , равенство (2.42) приводится к виду

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i^2 \right) = \sum_{i=0}^n \vec{s}_i \vec{F}_i + \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i^2. \quad (2.44)$$

Используя барицентрический момент инерции системы (2.37) в виде  $I_G = \sum_{i=0}^n m_i \vec{s}_i^2$ , из (2.44) получим дифференциальное соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_G}{dt^2} = V + 2T, \quad (2.45)$$

где "живая сила" (т.е. удвоенная кинетическая энергия)  $2T = \sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{s}}_i^2$  - другая энергетическая характеристика системы.

Если силы взаимодействия в механической системе потенциальны, т.е.

$$\dot{\vec{F}}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{s}_i} \Pi(\vec{s}_i), \quad \Pi(\vec{s}_i) = -\frac{f}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\vec{s}_j - \vec{s}_i|, \quad (2.46)$$

где  $\Pi(\vec{s}_i)$  - потенциальная энергия ньютонова тяготения, и, следовательно, является однородной (по Эйлера) функцией минус первой степени, то по теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$V = -\sum_{i=0}^n \left( \vec{s}_i \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{s}_i} \right) = \Pi. \quad (2.47)$$

Это означает, что в случае взаимодействия по закону всемирного тяготения вириал Клазиуса совпадает с потенциальной энергией системы гравитирующих тел.

После подстановки полученного значения вириала соотношение (2.45) приобретает вид

$$\frac{d^2 I_G}{dt^2} = 4T + 2\Pi. \quad (2.48)$$

В динамике звездных систем последнее равенство известно как *уравнение Эддингтона*. Для так называемых *стационарных* гравитационно связанных систем небесных тел, удовлетворяющих условию

$$\frac{d^2 I_G}{dt^2} = 0, \quad (2.49)$$

тогда вытекает равенство

$$2T = -\Pi. \quad (2.50)$$

В результате приходим к теореме о вириале в формулировке Анри Пуанкаре:

в стационарной звездной системе ее "живая сила" равна абсолютной величине потенциальной энергии притяжения.

Учитывая связь (2.8) потенциальной энергии и силовой функции, равенство (2.50) записывается в эквивалентной форме

$$T = \frac{1}{2}U. \quad (2.51)$$

Теорема Пуанкаре о вириале играет в астрономии выдающуюся роль, являясь основным средством для определения так называемых "вириальных масс" различных систем небесных тел. Именно благодаря этой теореме возникло понятие *скрытой массы*, принадлежащей несветящейся космической материи и проявляющейся только благодаря гравитационному взаимодействию.

В звездной динамике приложения теоремы Пуанкаре наиболее эффективны при определении масс сферически симметричных систем небесных тел (шаровых звездных скоплений и скоплений галактик).

Если ввести средний взвешенный по массе квадрат скорости системы небесных объектов

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n m_i \dot{s}^2, \quad (2.52)$$

где через  $M = \sum_{i=0}^n m_i$  обозначена полная масса системы, то ее кинетическая энергия приводится к виду

$$T = \frac{1}{2}M \langle v^2 \rangle, \quad (2.53)$$

а выражение для потенциальной энергии упрощается путем введения средней массы  $m$  небесного тела и некоторого среднего значения взаимного расстояния  $\langle \Delta \rangle$  между звездами так, что потенциальная энергия (2.46) принимает вид

$$\Pi = -\frac{f}{2} \sum_{i=0}^n \frac{m^2}{\langle \Delta \rangle} = -\frac{f}{2} \frac{n(n+1)}{2} \frac{m^2}{\langle \Delta \rangle}. \quad (2.54)$$

Из (2.51), (2.53) и (2.54) тогда получается

$$\langle v^2 \rangle = \frac{fM}{2 \langle \Delta \rangle}, \quad (2.55)$$

что дает возможность вычислить полную массу системы  $M$  по ее "радиусу"  $\langle \Delta \rangle$  и средневзвешенному квадрату скорости  $\langle v^2 \rangle$ .

Очевидно, что с учетом формулы  $\Pi = -U$  и интеграла энергии барицентрического движения (2.25) уравнение Эддингтона (2.48) приводится к стандартному виду уравнения Лагранжа-Якоби (2.40).

## 2.6 Неравенство Зундмана

Наряду с уравнением Лагранжа-Якоби для качественных исследований динамических систем широко используется знаменитое неравенство Зундмана

$$2I(U + h) \geq c^2, \quad (2.56)$$

где  $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$  - величина полного момента импульса, а  $h$  - полная механическая энергия системы.

Убедимся в справедливости этого неравенства непосредственной проверкой.

Учитывая интеграл энергии  $T = U + h$ , где  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\rho}_i^2$ ,

перепишем неравенство Зундмана в виде

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i^2 \sum_{j=0}^n m_j \dot{\rho}_j^2 \geq \left( \sum_{i=0}^n m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\rho}_i \right) \left( \sum_{j=0}^n m_j \vec{\rho}_j \times \dot{\rho}_j \right) \quad (2.57)$$

или

$$\sum_{i,j=0}^n A_{ij} m_i m_j \geq 0. \quad (2.58)$$

Выделим в этом неравенстве коэффициент  $A_{ij}$  при произведении масс  $m_i m_j$  и  $m_j m_i$  и убедимся, что он больше или равен нулю:

$$A_{ij} = \vec{\rho}_i^2 \dot{\rho}_j^2 + \vec{\rho}_j^2 \dot{\rho}_i^2 - 2(\vec{\rho}_i \times \dot{\rho}_i)(\vec{\rho}_j \times \dot{\rho}_j) \geq 0. \quad (2.59)$$

Учитывая неравенства для скалярного и векторного произведений произвольных векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$

$$-(\vec{A}\vec{B}) \geq -AB, \quad -|\vec{A} \times \vec{B}| \geq -AB, \quad (2.60)$$

перепишем неравенство (2.59) в виде

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \vec{\rho}_i^2 \dot{\rho}_j^2 + \vec{\rho}_j^2 \dot{\rho}_i^2 - 2|\vec{\rho}_i \times \dot{\rho}_i| |\vec{\rho}_j \times \dot{\rho}_j| \geq \\ &\geq \rho_i^2 \dot{\rho}_j^2 + \rho_j^2 \dot{\rho}_i^2 - 2\rho_i \rho_j |\dot{\rho}_i| |\dot{\rho}_j| = \left( \rho_i |\dot{\rho}_j| - \rho_j |\dot{\rho}_i| \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Справедливость последнего неравенства очевидна. Поэтому для любых  $i$  и  $j$ , включая  $i = j$  выполняется неравенство (2.59), а вместе с ним и исходное неравенство Зундмана (2.56).

## 2.7 Уравнения относительного движения

Введем относительную систему прямоугольных координат  $M_0xyz$ . Начало координат разместим в точке  $M_0$ , а направления осей выберем параллельными осям системы  $OXYZ$ . Положение тел  $M_1, M_2, \dots, M_n$  в относительной системе координат  $M_0xyz$  будем характеризовать радиусами-векторами  $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), исходящими из начала координат  $M_0$ . Переход от абсолютной к относительной системе координат задается преобразованием

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \vec{\rho}_0 \quad (2.62)$$

или в координатной форме

$$x_i = X_i - X_0, \quad y_i = Y_i - Y_0, \quad z_i = Z_i - Z_0. \quad (2.63)$$

Записывая уравнения абсолютного движения (2.3) для тела  $M_0$  (с выделением члена, содержащего множитель  $fm_i$ )

и отдельно для остальных тел  $M_i$  в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\rho}}_0 &= f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^n m_j \frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_0}{r_{0j}^3} = f \sum_{j=1}^n m_j \frac{\vec{r}_j}{r_{0j}^3} = f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{r}_j}{r_{0j}^3} + f m_i \frac{\vec{r}_i}{r_{0i}^3}, \\ \ddot{\vec{\rho}}_i &= f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{r_{ij}^3} = f \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} = \\ &= f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - f m_0 \frac{\vec{r}_i}{r_{0i}^3}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\tag{2.64}$$

и вычитая из второго уравнения первое с учетом, что  $\vec{r}_i = \vec{r}_{0i} = \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_0$  и  $r_{i0} = r_{0i} = r_i$ , получим

$$\ddot{\vec{\rho}}_i - \ddot{\vec{\rho}}_0 = f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left( \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) - f(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}.\tag{2.65}$$

Окончательно уравнения относительного движения запишем в виде

$$\ddot{\vec{r}}_i + f(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left( \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n)\tag{2.66}$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i + f(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left( \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \\ \ddot{y}_i + f(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} &= f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left( \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right), \\ \ddot{z}_i + f(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} &= f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left( \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right).\end{aligned}\tag{2.67}$$

За счет перехода к относительным координатам порядок системы уравнений понизился на шесть единиц и равен  $6n$ . Если в уравнениях относительного движения (2.66)

положить все  $m_j$  равными нулю, то все правые части обратятся в нули, и для каждого  $i$  получим уравнения задачи двух тел  $M_0$  и  $M_i$ , что объясняет физический смысл правых частей уравнений движения - это возмущающие ускорения, действующие на тело  $M_i$  в его движении относительно тела  $M_0$  со стороны всех остальных тел.

Эти возмущающие ускорения для каждого тела можно выразить через производные от одной функции, называемой *возмущающей* или *пертурбационной* функцией. Возмущающая функция вводится в виде

$$R_i = f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j R_{ij}, \quad \text{где} \quad R_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}. \quad (2.68)$$

Легко убедиться, что

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}, \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial y_i} = \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3}, \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i} = \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3}. \quad (2.69)$$

Тогда уравнения (2.67) перепишутся в виде

$$\ddot{x}_i + \frac{\mu_i x_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \quad \ddot{y}_i + \frac{\mu_i y_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \quad \ddot{z}_i + \frac{\mu_i z_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial z_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.70)$$

или в векторной форме

$$\ddot{\vec{r}}_i + \frac{\mu_i \vec{r}_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial \vec{r}_i}, \quad (2.71)$$

где  $\mu_i = f(m_0 + m_i)$  - гравитационный параметр тел  $M_0$  и  $M_i$ .

Эти уравнения являются основой теории движения планет. Правые части определяют возмущающие ускорения в движении планеты  $M_i$  под действием притяжения других планет Солнечной системы.

Уравнения относительного движения (2.70) допускают существование только четырех первых интегралов: три интеграла площадей и интеграл энергии. Интегралов движения центра масс для этих уравнений не существует, что сразу ясно из неинерциальности системы относительных координат  $M_0xyz$ .

Интегралы площадей и энергии можно получить из классических интегралов в абсолютной системе координат, если в них осуществить замену переменных по формулам перехода (2.62) от абсолютной к относительной системе координат и, кроме того, заменить  $\vec{\rho}$  и  $\dot{\vec{\rho}}$  их выражениями из интегралов движения центра масс:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i - \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \left( \sum_{j=1}^n m_j \dot{\vec{r}}_j \right) &= \\ &= \vec{c} + \frac{1}{m} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}', \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2m} \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \right)^2 &= U + h - \frac{a^2}{2m} = U + h'. \end{aligned} \quad (2.72)$$

## 2.8 Уравнения движения в координатах Якоби

В уравнениях (2.70) для каждого тела используется своя возмущающая функция  $R_i$ . Один из способов устранения этого недостатка - переход к координатам Якоби.

Для этого рассмотрим переход к координатам, определяемым неизменным направлением осей координат, но с различным началом координат  $G_i$  для каждого тела  $M_i$ , находящимся в барицентре системы  $M_0, M_1, \dots, M_{i-1}$ , т.е. координаты  $x'_i, y'_i, z'_i$  тела  $M_i$  определяются в системе  $G_{i-1}x'_iy'_iz'_i$ . Это и есть системы координат Якоби.

Связь координат Якоби и абсолютных координат опре-

деляется по формуле

$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_{G_{i-1}} + \vec{r}'_i, \quad (2.73)$$

где

$$\vec{\rho}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}, \quad \vec{r}'_i = \{x'_i, y'_i, z'_i\}, \quad \vec{\rho}_{G_{i-1}} = \{X_{G_{i-1}}, Y_{G_{i-1}}, Z_{G_{i-1}}\}. \quad (2.74)$$

Учитывая, что по определению барицентра  $\sigma_i \vec{\rho}_{G_{i-1}} = \sum_{j=0}^{i-1} m_j \vec{\rho}_j$ , где обозначено  $\sigma_i = m_0 + m_1 + \dots + m_i$ , замену переменных можно записать в виде

$$\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_0 = \vec{r}'_1, \quad \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1 = \vec{r}'_2 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \vec{r}'_1, \quad \dots, \quad \vec{\rho}_{i+1} - \vec{\rho}_i = \vec{r}'_{i+1} - \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} \vec{r}'_1. \quad (2.75)$$

Производя такую замену переменных, получим уравнения задачи многих тел в координатах Якоби в скалярной

$$m'_i \ddot{x}'_i = \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \quad m'_i \ddot{y}'_i = \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \quad m'_i \ddot{z}'_i = \frac{\partial U}{\partial z'_i} \quad (2.76)$$

или в векторной форме

$$m'_i \ddot{\vec{r}}'_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.77)$$

где

$$m'_i = m_i \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}, \quad (2.78)$$

$$r_{ij}^2 = \left( x'_j - x'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left( y'_j - y'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left( z'_j - z'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k} \right)^2. \quad (2.79)$$

Как видим, что уравнения движения в координатах Якоби имеют такой же вид, как и для абсолютных координат. Они допускают три интеграла площадей и интеграл энергии.

## 2.9 Уравнения движения в оскулирующих элементах

Далее в этом разделе у всех величин нижний индекс  $i$ , характеризующий параметры тела  $M_i$ , при выводе уравнений движения в оскулирующих элементах для простоты не выписывается.

### 2.9.1 Определение оскулирующих элементов

Оскулирующие элементы были введены Лагранжем, использовавшим идею Эйлера - сохранения для возмущенного движения всех формул невозмущенного. Эту идею можно осуществить, если кеплеровские элементы орбиты представить такими (заранее неизвестными) функциями времени, чтобы они обращали уравнения возмущенного движения в тождества.

Таким образом, *оскулирующими элементами* называются такие зависящие от времени элементы, которые определяют положение и скорость возмущенного движения тел по формулам невозмущенного движения.

С математической точки зрения идея Лагранжа заключается в замене переменных  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  на новые переменные  $p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), \tau(t)$ . Поэтому дифференциальные уравнения возмущенного движения можно записать в оскулирующих элементах. В теории дифференциальных уравнений метод Лагранжа принято называть методом *вариации произвольных постоянных*, в качестве которых в астрономии выступают кеплеровские элементы невозмущенной орбиты.

Уравнения возмущенного движения отличаются от уравнений невозмущенного движения наличием дополнительного (возмущающего) ускорения, поэтому оскулирующие элементы в каждый момент времени определяют коническое сечение, соприкасающееся с возмущенной траекторией, а ис-

тинная орбита является огибающей семейства таких конических сечений. Соприкасающиеся кривые называются *оскулирующими*, соответствующие элементы конического сечения - *оскулирующими элементами*, а момент времени, к которому относятся оскулирующие элементы, в астрономии называются *эпохой оскуляции*.

### 2.9.2 Основная операция

Для вывода дифференциальных уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах воспользуемся методом с использованием процедуры, называемой *основной операцией*.

Пусть для невозмущенного движения, описываемого дифференциальными уравнениями относительного движения

$$\ddot{\vec{r}}_n + \frac{\mu}{r_n^3} \vec{r}_n = 0, \quad (2.80)$$

где  $\vec{r}_n$  и  $\dot{\vec{r}}_n$  - векторы положения и скорости небесного объекта в невозмущенном движении, имеем какое-либо векторное (или скалярное) соотношение между  $\vec{r}_n$ ,  $\dot{\vec{r}}_n$  и кеплеровскими элементами невозмущенной орбиты в виде

$$\vec{\Psi}_n(t, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, \vec{e}_n) = 0. \quad (2.81)$$

Здесь использован шестимерный вектор для невозмущенных кеплеровских элементов  $\vec{e}_n = \{p_n, e_n, i_n, \Omega_n, \omega_n, \tau_n\}$ , а нижний индекс "n" означает принадлежность соответствующей величины к невозмущенному кеплеровскому движению с постоянными элементами  $\vec{e}_n$ .

Для дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{F}, \quad (2.82)$$

где  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  - векторы положения и скорости небесного объекта в возмущенном движении, а  $\vec{F}$  - вектор возмущающего ускорения, соотношение (2.81), согласно основной идее метода

Лагранжа вариации произвольных постоянных интегрирования, должно оставаться справедливым, т. е.

$$\vec{\Psi}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{\epsilon}}) = 0. \quad (2.83)$$

Вычисление полных производных по времени функций  $\vec{\Psi}_n$  и  $\vec{\Psi}$  дает следующие два равенства:

$$\frac{d\vec{\Psi}_n}{dt} = \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial\vec{r}_n} \dot{\vec{r}}_n + \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial\dot{\vec{r}}_n} \ddot{\vec{r}}_n = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} = \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{r}} \dot{\vec{r}} + \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\dot{\vec{r}}} \ddot{\vec{r}} + \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\dot{\vec{\epsilon}}} \dot{\vec{\epsilon}} = 0. \quad (2.85)$$

Результатом вычитания уравнения (2.84) из (2.85) является равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Psi}}{dt} - \frac{d\vec{\Psi}_n}{dt} &= \left( \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial t} \right) + \\ &+ \left( \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{r}} \dot{\vec{r}} - \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial\vec{r}_n} \dot{\vec{r}}_n \right) + \left( \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\dot{\vec{r}}} \ddot{\vec{r}} - \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial\dot{\vec{r}}_n} \ddot{\vec{r}}_n \right) + \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\dot{\vec{\epsilon}}} \dot{\vec{\epsilon}} = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

В соответствии с основной идеей Лагранжа функции  $\Psi$  и  $\Psi_n$ , а также их частные производные по времени, координатам и скоростям совпадают друг с другом:

$$\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_n, \quad \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial t}, \quad \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{r}} = \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial\vec{r}_n}, \quad \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\dot{\vec{r}}} = \frac{\partial\vec{\Psi}_n}{\partial\dot{\vec{r}}_n}. \quad (2.87)$$

Векторы положения и скорости на возмущенной и невозмущенной орбитах в точке соприкосновения совпадают (условия оскуляции)

$$\vec{r} = \vec{r}_n, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_n, \quad (2.88)$$

а связь между возмущенным и невозмущенным ускорениями можно получить из дифференциальных уравнений (2.80) и (2.82):

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_n + \vec{F}. \quad (2.89)$$

Поэтому имеют место равенства

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\Psi}_n}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{\Psi}_n}{\partial \vec{r}_n} \dot{\vec{r}}_n, \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{r}} \ddot{\vec{r}} - \frac{\partial \vec{\Psi}_n}{\partial \vec{r}_n} \ddot{\vec{r}}_n = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{r}} \vec{F}, \quad (2.90)$$

в силу которых уравнение (2.86) представляется в виде

$$\left\{ \frac{d\vec{\Psi}}{dt} \right\} = \frac{d\vec{\Psi}}{dt} - \frac{d\vec{\Psi}_n}{dt} = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{r}} \vec{F} + \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{\epsilon}} \dot{\vec{\epsilon}} = 0, \quad (2.91)$$

где  $\left\{ d\vec{\Psi}/dt \right\}$  - означает разность полных производных по времени от функции  $\vec{\Psi}$ , вычисляемых в силу дифференциальных уравнений движения (2.82) и (2.80).

Эту разность можно рассматривать как некоторую специальным образом определяемую производную функции  $\vec{\Psi}$ , когда координаты и время рассматриваются как постоянные величины, ускорение  $\ddot{\vec{r}}$  заменяется на  $\vec{F}$ , а дифференцирование по кеплеровским элементам проводится обычным образом. Будем называть вычисление такой производной *основной операцией* и обозначать ее фигурными скобками. Составление соотношения (2.91) и есть процедура применения основной операции к соотношению (2.83).

Если в качестве шести скалярных соотношений  $\Psi_n^{(i)}$  вида (2.81) использовать общий интеграл невозмущенного движения, то, применяя к нему основную операцию, получим шесть независимых линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора  $\dot{\vec{\epsilon}}$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \vec{\epsilon}} \dot{\vec{\epsilon}} = - \frac{\partial \Psi_i}{\partial \vec{r}} \vec{F}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (2.92)$$

Решая эту алгебраическую систему уравнений относительно  $\dot{p}$ ,  $\dot{e}$ ,  $di/dt$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\tau}$ , получим искомые дифференциальные уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах. Конкретный вывод таких уравнений рассматривается в следующем разделе.

### 2.9.3 Вывод дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах

#### 2.9.3.1 1. Уравнения для фокального параметра, долготы восходящего узла и наклона орбиты

Рассмотрим в качестве соотношения (2.83) интеграл площадей, представленный векторным равенством

$$\vec{\Psi}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, e, i, \Omega) = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} - \vec{c} = 0, \quad (2.93)$$

где  $\vec{e}^* = \{\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i\}$ , а  $\vec{c} = \sqrt{\mu p} \vec{e}^*$  - переменный (оскулирующий) вектор момента количества движения в возмущенном движении.

Применяя основную операцию к равенству (2.93), получим

$$\left\{ \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} \right\} = \vec{r} \times \vec{F} - \frac{d\vec{c}}{dt} = 0, \quad (2.94)$$

где обыкновенная производная  $d\vec{c}/dt$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{c}}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{2p} \frac{dp}{dt} \vec{e}^* + \sqrt{\mu p} \frac{d\vec{e}^*}{dt} = \\ &= \sqrt{\mu p} \left( \frac{1}{2p} \frac{dp}{dt} \vec{e}^* + \frac{\partial \vec{e}^*}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial \vec{e}^*}{\partial i} \frac{di}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Учитывая выражения для производных единичного вектора  $\vec{e}^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}^*}{\partial \Omega} &= \{\sin i \cos \Omega, \sin i \sin \Omega, 0\} = \sin i \vec{e}_N, \\ \frac{\partial \vec{e}^*}{\partial i} &= \{\sin \Omega \cos i, -\cos \Omega \cos i, -\sin i\} = -\vec{e}'_N, \end{aligned} \quad (2.96)$$

уравнение (2.94) представим в виде

$$\frac{1}{2p} \frac{dp}{dt} \vec{e}^* + \sin i \frac{d\Omega}{dt} \vec{e}_N - \frac{di}{dt} \vec{e}'_N = \vec{r} \times \vec{F}' = r[\vec{e} \times \vec{F}'], \quad (2.97)$$

где введено обозначение  $\vec{F}' = \vec{F}/\sqrt{\mu p}$ . Векторное уравнение (2.94) представляет собой систему трех линейных скалярных алгебраических уравнений для определения производных по времени оскулирующих элементов  $p, \Omega, i$ .

Пусть векторы возмущающего ускорения  $\vec{F}$  или  $\vec{F}'$  суть

$$\vec{F} = S\vec{e} + T\vec{e}' + W\vec{e}^* = \{S, T, W\}, \quad \frac{\vec{F}}{\sqrt{\mu p}} = \vec{F}' = \{S', T', W'\}, \quad (2.98)$$

где  $S, T, W$  - радиальная, трансверсальная и бинормальная проекции.

Умножением векторного соотношения (2.97) скалярно сначала на  $\vec{e}^*$ , затем на  $\vec{e}'_N$  и, наконец, на  $\vec{e}'_N$  выводятся следующие три скалярные равенства, каждое из которых содержит лишь по одной из искомым величин  $dp/dt, d\Omega/dt$  или  $di/dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \frac{dp}{dt} &= r\vec{e}^*[\vec{e} \times \vec{F}'] = r\vec{F}'[\vec{e}^* \times \vec{e}] = r(\vec{F}'\vec{e}') = rT', \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= r\vec{e}'_N[\vec{e} \times \vec{F}'] = \\ &= r\vec{F}'[\vec{e}'_N \times \vec{e}] = r(\vec{F}'\vec{e}^*) \sin u = r \sin u W', \\ -\frac{di}{dt} &= r\vec{e}'_N[\vec{e}' \times \vec{F}'] = \\ &= r\vec{F}'[\vec{e}'_N \times \vec{e}'] = -r(\vec{F}'\vec{e}^*) \cos u = -r \cos u W'. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Таким образом, первые три уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах имеют вид

$$\frac{dp}{dt} = 2prT', \quad \frac{d\Omega}{dt} = r \frac{\sin u}{\sin i} W', \quad \frac{di}{dt} = r \cos u W'. \quad (2.100)$$

### 2.9.3.2 2. Уравнение для эксцентриситета

Дифференциальное уравнение для оскулирующего эксцентриситета орбиты выводится с помощью формул (1.87), переписанных в виде:

$$e \sin v = \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_r, \quad e \cos v = \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_n - 1, \quad (2.101)$$

где  $V_r = \vec{V}\vec{e}$ ,  $V_n = \vec{V}\vec{e}'$  - соответственно радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости  $\vec{V}$ .

Применяя основную операцию к равенствам

$$\Psi^{(1)} = e \sin v - \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_r = 0, \quad \Psi^{(2)} = 1 + e \cos v - \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_n = 0, \quad (2.102)$$

приходим к двум соотношениям

$$\begin{aligned} \sin v \frac{de}{dt} + e \cos v \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \left\{ \frac{dV_r}{dt} \right\} + \frac{V_r}{2p} \frac{dp}{dt} \right], \\ \cos v \frac{de}{dt} - e \sin v \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \left\{ \frac{dV_n}{dt} \right\} + \frac{V_n}{2p} \frac{dp}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Применяя основную операцию к радиальной и трансверсальной составляющим скорости

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dV_r}{dt} \right\} &= \left\{ \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{e} \right\} = \left\{ \frac{d\vec{V}}{dt} \right\} \vec{e} = \vec{F}\vec{e} = S, \\ \left\{ \frac{dV_n}{dt} \right\} &= \left\{ \frac{d\vec{V}}{dt} \right\} \vec{e}' = \vec{F}\vec{e}' = T \end{aligned} \quad (2.104)$$

и подставляя значение для  $dp/dt$  из (2.100), уравнения (2.103) представим в виде

$$\begin{aligned} \sin v \frac{de}{dt} + e \cos v \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} &= pS' + re \sin v T', \\ \cos v \frac{de}{dt} - e \sin v \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} &= \left[ p \left( 1 + \frac{r}{p} \right) + re \cos v \right] T', \end{aligned} \quad (2.105)$$

где  $S' = S/\sqrt{\mu p}$  и  $T' = T/\sqrt{\mu p}$ .

Решая эту линейную алгебраическую систему относительно  $de/dt$  и  $e\{dv/dt\}$ , получим дифференциальное уравнение для оскулирующего эксцентриситета орбиты  $e$  и выражение

основной операции для истинной аномалии  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T', \\ e \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} &= p \cos v S' - p \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T'. \end{aligned} \quad (2.106)$$

### 2.9.3.3 3. Уравнение для аргумента перицентра

При выводе дифференциального уравнения для оскулирующего аргумента перицентра воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r\alpha = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r\beta = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \end{aligned} \quad (2.107)$$

следствиями которых являются следующие равенства:

$$x \cos \Omega + y \sin \Omega = r \cos u, \quad -x \sin \Omega + y \cos \Omega = r \sin u \cos i. \quad (2.108)$$

Выберем функции  $\Psi^{(3)}$  и  $\Psi^{(4)}$  в виде

$$\Psi^{(3)} = r \cos u - x \cos \Omega - y \sin \Omega = 0, \quad \Psi^{(4)} = u - v - \omega = 0, \quad (2.109)$$

где для  $\Psi^{(3)}$  использовано первое равенство из (2.108), а для  $\Psi^{(4)}$  - известная зависимость между аргументом широты  $u$ , аргументом перицентра  $\omega$  и истинной аномалией  $v$ .

Основная операция для функций  $\Psi^{(3)}$  и  $\Psi^{(4)}$  представляется в виде

$$-r \sin u \left\{ \frac{du}{dt} \right\} = (-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \frac{d\Omega}{dt}, \quad \left\{ \frac{du}{dt} \right\} = \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} + \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.110)$$

Используя для упрощения второе равенство в (2.108), преобразуем уравнения (2.110) к виду

$$\left\{ \frac{du}{dt} \right\} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt}, \quad \left\{ \frac{du}{dt} \right\} = \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} + \frac{d\omega}{dt}, \quad (2.111)$$

откуда получим

$$\frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt} - \left\{ \frac{dv}{dt} \right\}. \quad (2.112)$$

Наконец, подстановка вместо производной  $d\Omega/dt$  ее выражения из второго уравнения в системе (2.100), а вместо  $\{dv/dt\}$  выражения из второго уравнения в (2.106), приводит к дифференциальному уравнению для аргумента перицентра в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{p}{e} \cos v S' + \frac{p+r}{e} \sin v T' - r \sin u \operatorname{ctg} i W'. \quad (2.113)$$

#### 2.9.3.4 4. Уравнение для момента прохождения через перицентр

Последнее (шестое) уравнение возмущенного движения, определяющее оскулирующий момент  $\tau$  прохождения через перицентр орбиты, выведем в наиболее общем виде, пригодном для движений любого типа.

Используя соотношение (1.84), запишем равенство

$$\Psi^{(5)} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - \tau) - J_1 = 0, \quad (2.114)$$

где

$$J_1 = \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}, \quad (2.115)$$

и применим к (2.114) основную операцию:

$$\left\{ \frac{d\Psi^{(5)}}{dt} \right\} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p^5}}(t - \tau) \frac{dp}{dt} - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{d\tau}{dt} - \left\{ \frac{dJ_1}{dt} \right\} = 0. \quad (2.116)$$

Откуда с учетом (2.114), т. е. подставляя  $\sqrt{\mu}(t - \tau) = p^{3/2} J_1$ , получим

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2} J_1 \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \left\{ \frac{dJ_1}{dt} \right\}, \quad (2.117)$$

где

$$\left\{ \frac{dJ_1}{dt} \right\} = \frac{\partial J_1}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial J_1}{\partial v} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\}. \quad (2.118)$$

Вычисление частных производных интеграла  $J_1$  дает

$$\frac{\partial J_1}{\partial e} = -\frac{2}{p^3} \int_0^v r^3 \cos v \, dv, \quad \frac{\partial J_1}{\partial v} = \frac{r^2}{p^2}. \quad (2.119)$$

Тогда соотношение (2.117) превращается в

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2} J_1 \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + J_2 \frac{de}{dt} - \frac{r^2}{p^2} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\}, \quad (2.120)$$

где введено обозначение

$$J_2 = \frac{2}{p^3} \int_0^v r^3 \cos v \, dv. \quad (2.121)$$

После подстановки вместо производных  $dp/dt$ ,  $de/dt$  и  $\{dv/dt\}$  их выражений из (2.100) и (2.106) соотношение (2.120) превращается в следующее

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{d\tau}{dt} = & -3r J_1 T' + J_2 p \sin v S' + \\ & + p J_2 \left[ \cos v + (e + \cos v) \frac{r}{p} \right] T' - \\ & - \frac{r^2}{pe} \left[ \cos v S' - \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T' \right]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Отсюда, после введения обозначения

$$N = \frac{p^2}{r^2} J_2 \quad (2.123)$$

и приведения подобных членов, следует равенство

$$\begin{aligned}
 e\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\frac{d\tau}{dt} &= p(eN \sin v - \cos v)\frac{r^2}{p^2}S' + \\
 + p \left[ -3\sqrt{\mu}ep^{-3/2}(t - \tau)\frac{p}{r} + N \left( e^2\frac{r}{p} + e \cos v + e\frac{r}{p} \cos v \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \frac{r^2}{p^2}T'.
 \end{aligned}
 \tag{2.124}$$

Правая часть уравнения (2.124) существенно упрощается с помощью следующих соотношений

$$\frac{d}{dv} \left[ \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] = \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos v + e \sin^2 v \frac{r^2}{p^2} \left( 1 + 2\frac{r}{p} \right).
 \tag{2.125}$$

С учетом тождества

$$e \cos v \frac{r^2}{p^2} \left( 1 + 2\frac{r}{p} \right) \equiv \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) - 2\frac{r^3}{p^3}
 \tag{2.126}$$

соотношение (2.125) превращается в следующее:

$$\frac{d}{dv} \left[ \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] = e \frac{r^2}{p^2} \left( 1 + 2\frac{r}{p} \right) + 2\frac{r^3}{p^3} \cos v.
 \tag{2.127}$$

Далее с помощью еще одного тождества

$$1 + 2\frac{r}{p} = 3 - 2\frac{r}{p}e \cos v
 \tag{2.128}$$

равенство (2.127) приобретает форму:

$$\frac{d}{dv} \left[ \frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] = 3e \frac{r^2}{p^2} + 2(1 - e^2) \frac{r^3}{p^3} \cos v.
 \tag{2.129}$$

Интегрирование равенства (2.129) в пределах от 0 до  $v$  дает

$$\frac{r}{p} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v = 3e \int_0^v \frac{r^2}{p^2} dv + 2(1 - e^2) \int_0^v \frac{r^3}{p^3} \cos v dv.
 \tag{2.130}$$

Это равенство с помощью (2.114), (2.121) и (2.123) приводится к виду

$$\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v = 3\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} e(t - \tau) + (1 - e^2) \frac{r^2}{p^2} N. \quad (2.131)$$

С помощью этой формулы и соотношения  $r = p/(1 + e \cos v)$  слагаемое, содержащее возмущающее ускорение  $T'$  в равенстве (2.124), принимает вид

$$\begin{aligned} p \left[ -3\sqrt{\mu} e p^{-3/2} (t - \tau) \frac{p}{r} + N \left( e^2 \frac{r}{p} + e \cos v + e \frac{r}{p} \cos v \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \frac{r^2}{p^2} T' = \\ = pN \left[ \frac{r}{p} + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) e \cos v \right] \frac{r^2}{p^2} T' = \frac{p^2}{r} N T', \end{aligned} \quad (2.132)$$

откуда окончательно следует дифференциальное уравнение, определяющее оскулирующее значение момента прохождения через перицентр  $\tau$ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r^2}{e} \left[ (e \sin v N - \cos v) S' + \frac{p}{r} N T' \right]. \quad (2.133)$$

Это уравнение справедливо для любых типов оскулирующих орбит (эллиптических, гиперболических и пр.).

Полная система дифференциальных уравнений возмущен-

ного движения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= 2prT', \\
 \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T', \\
 \frac{di}{dt} &= r \cos u W' \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} i W', \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{p}{e} \cos v S' + \frac{r+p}{e} \sin v T' - r \operatorname{ctg} i \sin u W', \\
 \frac{d\tau}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r^2}{e} \left[ (e \sin v N - \cos v) S' + \frac{p}{r} N T' \right],
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

где

$$\begin{aligned}
 S' &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} S, \quad T' = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} T, \quad W' = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} W, \\
 r &= \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad u = \omega + v, \quad N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^v \frac{r^3}{p^3} \cos v \, dv,
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

а истинная аномалия  $v$  связана со временем  $t$  соотношением

$$J_1 = \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau). \tag{2.136}$$

Систему (2.134) уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$  называют уравнениями *Ньютона-Эйлера*.

### 2.9.3.5 5. Уравнения в оскулирующих эллиптических элементах

В случае движений эллиптического типа используют кеплеровские элементы эллиптического движения  $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ .

Поэтому при переходе к движениям с эксцентриситетом  $e < 1$  в системе (2.134) изменятся только первое и последнее уравнения.

Дифференцируя по времени  $t$  соотношение  $p = a(1 - e^2)$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{da}{dt}(1 - e^2) - 2ae \frac{de}{dt} \quad (2.137)$$

и используя для  $dp/dt$  и  $de/dt$  их выражения из уравнений (2.134), получим дифференциальное уравнение для оскулирующей большой полуоси

$$\frac{da}{dt} = 2a^2 \left( e \sin vS' + \frac{p}{r} T' \right). \quad (2.138)$$

Продельвая аналогичные операции с соотношением  $n = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$ , получим дифференциальное уравнение для оскулирующего среднего движения  $n$ :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a} \frac{da}{dt} = -3na \left( e \sin vS' + \frac{p}{r} T' \right). \quad (2.139)$$

Вывод уравнения для оскулирующей средней аномалии в эпоху  $t_0$  можно осуществить, используя одну из двух формул, выражающих связь средней аномалии  $M$  и времени  $t$ : либо в виде

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (2.140)$$

либо

$$M = M_{(0)} + \int_{t_0}^t n dt, \quad (2.141)$$

где величины  $M_0$  и  $M_{(0)}$  называются одинаково - средняя аномалия в эпоху  $t_0$ .

В невозмущенном движении обе эти формулы тождественны друг другу, так как среднее движение  $n$  постоянно, т.е.  $M_0 = M_{(0)}$ . В возмущенном движении величины  $M_0$  и  $M_{(0)}$  не совпадают, и их можно связать следующей зависимостью

$$M_0 = M_{(0)} - n(t - t_0) + \int_{t_0}^t n dt. \quad (2.142)$$

Поэтому дифференциальное уравнение для оскулирующей средней аномалии в эпоху  $t_0$  зависит от выбора в качестве исходного уравнения или (2.140), или (2.141). Действительно, применяя основную операцию к указанным уравнениям получим разные выражения для основной операции  $\{dM/dt\}$ :

$$\left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = \frac{dM_0}{dt} + \frac{dn}{dt}(t - t_0), \quad (2.143)$$

$$\left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = \frac{dM_{(0)}}{dt}. \quad (2.144)$$

Вычитая из уравнения (2.144) уравнение (2.143), получим связь между производными  $dM_0/dt$  и  $dM_{(0)}/dt$  в виде

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{dM_{(0)}}{dt} - \frac{dn}{dt}(t - t_0), \quad (2.145)$$

что дает возможность ограничиться выводом дифференциального уравнения для  $M_{(0)}$ , а уравнение для  $M_0$  тогда получим из (2.145).

Применение основной операции к уравнению Кеплера  $E - e \sin E = M$  и соотношению  $r = a(1 - e \cos E)$  приводит к следующим соотношениям:

$$\left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = (1 - e \cos E) \left\{ \frac{dE}{dt} \right\} - \sin E \frac{de}{dt}, \quad (2.146)$$

$$\frac{r}{a} \frac{da}{dt} - a \cos E \frac{de}{dt} + ae \sin E \left\{ \frac{dE}{dt} \right\} = 0. \quad (2.147)$$

Выражая  $\{dE/dt\}$  из (2.147) и подставляя результат в (2.146), приходим к равенству

$$\left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = \left( \frac{r}{ae} \operatorname{ctg} E - \sin E \right) \frac{de}{dt} - \frac{r^2}{a^3 e \sin E} \frac{da}{dt}. \quad (2.148)$$

Зависимости

$$\cos E - e = \frac{r}{a} \cos v, \quad \sin E = \frac{r}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v \quad (2.149)$$

позволяют преобразовать коэффициенты при  $de/dt$  и  $da/dt$  в (2.148) к виду

$$\begin{aligned} \frac{r}{ae} \operatorname{ctg} E - \sin E &= \frac{\cos E - e}{e \sin E} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \operatorname{ctg} v, \\ \frac{1}{ae} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sin E} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{r}{a^2 \sin v}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Подставляя (2.150) в (2.148), получаем

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = \operatorname{ctg} v \frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2 \sin v} \frac{da}{dt} \quad (2.151)$$

или с учетом (2.106) и (2.138) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} &= (p \cos v - 2er)S' + \\ &+ \frac{p}{\sin v} (\cos^2 v + \cos v \cos E - 2)T'. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Так как благодаря (2.149)

$$\cos^2 v + \cos v \cos E - 2 = -\frac{r+p}{p} \sin^2 v, \quad (2.153)$$

то (2.152) принимает вид

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = (p \cos v - 2er)S' - (r+p) \sin v T'. \quad (2.154)$$

Если воспользоваться выражениями (2.144) и (2.154), то для  $M_{(0)}$  получим окончательное уравнение в виде

$$\frac{dM_{(0)}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er)S' - (r+p) \sin v T']. \quad (2.155)$$

Если же использовать соотношение (2.143), то в соответствии с формулой (2.145) получим дифференциальное уравнение для оскулирующего кеплеровского элемента  $M_0$

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er)S' - (r+p) \sin v T'] + \\ &+ 3na \left( e \sin v S' + \frac{p}{r} T' \right) (t - t_0), \end{aligned} \quad (2.156)$$

где вместо производной  $dn/dt$  подставлено ее значение из (2.139).

Правая часть уравнения (2.156) содержит множителем время  $t$ , вследствие чего величина  $M_0$  с течением времени может принимать большие значения даже при малых возмущающих ускорениях  $S'$  и  $T'$ , а это приводит к неудобствам при проведении вычислений. По этой причине в астрономии в качестве средней аномалии в эпоху  $t_0$  в возмущенном движении практически всегда используется величина  $M_{(0)}$  (хотя при этом для простоты ее по-прежнему обозначают через  $M_0$ ).

Вся система дифференциальных уравнений в оскулирующих эллиптических элементах имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= 2a^2 \left( e \sin v S' + \frac{p}{r} T' \right), \\ \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T', \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u W', \\ \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} i W', \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{p}{e} \cos v S' + \frac{r+p}{e} \sin v T' - r \operatorname{ctg} i \sin u W', \\ \frac{dM_{(0)}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er) S' - (r+p) \sin v T'],\end{aligned}\tag{2.157}$$

где  $M_{(0)}$  - оскулирующая средняя аномалия в эпоху  $t_0$ , связанная с  $M$  уравнением (2.141), т.е.  $M = M_{(0)} + \int_{t_0}^t n dt$ .

Эту систему называют уравнениями *Ньютона-Эйлера* в оскулирующих элементах для движений эллиптического типа.

Если для описания движений эллиптического типа использовать оскулирующие элементы  $a, e, i, \pi, \omega, \varepsilon$ , где  $\pi = \Omega + \omega$  - долгота перигентра, а  $\varepsilon = \pi + M_0$  - средняя долгота в эпоху  $t_0$ , то уравнения возмущенного движения для

элементов  $\pi$  и  $\varepsilon$  без труда выводятся из уравнений (2.157):

$$\begin{aligned} e \frac{d\pi}{dt} &= -p \cos v S' + (r + p) \sin v T' + r \operatorname{ctg} \frac{i}{2} W', \\ e \frac{d\varepsilon}{dt} &= -[p(1 - \sqrt{1 - e^2}) \cos v + 2er\sqrt{1 - e^2}] S' + \\ &+ (r + p)(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sin v T' + er \operatorname{ctg} \frac{i}{2} \sin u W'. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Система (2.157) имеет особенности (нуль в знаменателе) при  $e = 0$  и  $i = 0$ . Эти особенности связаны с определением кеплеровских элементов. В самом деле, при  $e \rightarrow 0$  аргумент перицентра  $\omega$  и средняя аномалия в эпоху  $M_0$  становятся неопределенными, так как для круговой орбиты перицентр не определен. Чтобы избежать этой неприятности следует перейти от кеплеровских элементов  $e, \omega$ , например, к элементам Лагранжа  $h, k$ , а вместо  $M_0$  к  $\varepsilon$  - средней долготе в эпоху  $t_0$  по формулам

$$h = e \sin \omega, \quad k = e \cos \omega. \quad (2.159)$$

Аналогично теряет смысл долгота восходящего узла  $\Omega$  при  $i = 0$ . Эту особенность можно устранить, если от кеплеровских элементов  $i, \Omega$  перейти к элементам  $p, q$ :

$$p = \operatorname{ctg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{ctg} i \cos \Omega. \quad (2.160)$$

Дифференциальные уравнения для введенных таким образом оскулирующих элементов получаются путем дифференцирования по времени

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sin \omega \frac{de}{dt} + k \frac{d\omega}{dt}, & \frac{dk}{dt} &= \cos \omega \frac{de}{dt} - h \frac{d\omega}{dt}, \\ \frac{dp}{dt} &= q \frac{d\Omega}{dt} + p \sec i \operatorname{cosec} i \frac{di}{dt}, & \frac{dq}{dt} &= -p \frac{d\Omega}{dt} + q \sec i \operatorname{cosec} i \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (2.161)$$

и подстановки для  $de/dt$ ,  $d\omega/dt$ ,  $d\Omega/dt$  и  $di/dt$  их выражений из (2.157). Никаких особенностей при  $e = 0$  и  $i = 0$  эти уравнения не имеют.

### 2.9.3.6 6. Оскулирующие уравнения движения для тел с переменными массами

В задаче Гильдена-Мещерского также можно использовать основную операцию при выводе уравнений движения в оскулирующих элементах для тел с переменными массами  $m_0 = m_0(t)$  и  $m = m(t)$ , то есть с переменным гравитационным параметром  $\mu = f(m_0 + m) = \mu(t)$ . Исходные уравнения относительного движения имеют тот же вид: прежние интегрируемые уравнения невозмущенного движения (2.80) задачи двух тел с постоянными массами  $m_0$  и  $m$  и уравнения возмущенного движения (2.82) этих тел с переменными массами, определяемыми заданной непрерывной дифференцируемой функцией  $\mu = \mu(t)$  и прежними возмущающими ускорениями  $\vec{F} = \{S, T, W\}$ . Если в качестве функции  $\Psi$ , аналогичной (2.81), выбрать левую часть уравнения  $\Psi(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{\epsilon}, \mu) = 0$ , справедливого для невозмущенного движения, то основную операцию для этого равенства с учетом переменности масс в возмущенном движении можно записать в виде

$$\left\{ \frac{d\vec{\Psi}}{dt} \right\} = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \dot{\vec{r}}} \vec{F} + \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{\epsilon}} \frac{d\vec{\epsilon}}{dt} + \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} = 0, \quad (2.162)$$

где  $\vec{F}$  - равнодействующая тех же возмущающих ускорений, что и для постоянных масс.

Вся процедура вывода дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах остается прежней, но при использовании в качестве  $\Psi$  функций, содержащих  $\mu = \mu(t)$ , в соответствии с формулой (2.162) добавляется член с множителем  $d\mu/dt$ , который характеризует дополнительные возмущения из-за изменения массы.

Например, при выводе уравнений для  $p, i, \Omega$  равенства (2.95) и (2.97) следует переписать в виде

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{2p} \frac{dp}{dt} \vec{e}^* + \sqrt{\mu p} \frac{d\vec{e}^*}{dt} + \frac{\sqrt{\mu p}}{2\mu} \frac{d\mu}{dt} \vec{e}^*, \quad (2.163)$$

$$\frac{1}{2p} \frac{dp}{dt} \vec{e}^* + \sin i \frac{d\Omega}{dt} \vec{e}_N - \frac{di}{dt} \vec{e}'_N = r[\vec{e} \times \vec{F}'] - \frac{1}{2\mu} \frac{d\mu}{dt} \vec{e}^*. \quad (2.164)$$

Дальнейшие выкладки показывают, что вид уравнений для оскулирующих элементов  $i$  и  $\Omega$  не изменяется

$$\frac{di}{dt} = r \cos u W', \quad \frac{d\Omega}{dt} = r \sin u \operatorname{cosec} i W', \quad (2.165)$$

а для фокального параметра получим

$$\frac{1}{2p} \frac{dp}{dt} = r \vec{e}^* [\vec{e} \times \vec{F}'] - \frac{1}{2\mu} \frac{d\mu}{dt} = r T' - \frac{1}{2\mu} \frac{d\mu}{dt}, \quad (2.166)$$

то есть

$$\frac{dp}{dt} = 2prT' - \frac{p}{\mu} \frac{d\mu}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d(\mu p)}{dt} = 2\mu prT'. \quad (2.167)$$

Аналогично выводятся дифференциальные уравнения для оскулирующего эксцентриситета и истинной аномалии путем применения основной операции к соотношениям

$$e \sin v - \sqrt{\frac{p}{\mu(t)}} V_r = 0, \quad (1 + e \cos v) - \sqrt{\frac{p}{\mu(t)}} V_n = 0. \quad (2.168)$$

Соответствующие уравнения возмущенного движения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T' - (e + \cos v) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\ e \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} &= p \cos v S' - p \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T' + \sin v \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Применение основной операции к соотношению

$$r \cos(\omega + v) - (x \cos \Omega + y \sin \Omega) = 0 \quad (2.170)$$

и использование дифференциальных уравнений для долготы восходящего узла и истинной аномалии приводит к дифференциальному уравнению для оскулирующего аргумента широты перицентра  $\omega$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{p}{e} \cos v S' + \frac{r+p}{e} \sin v T' - r \operatorname{ctg} i \sin u W' - \frac{\sin v}{e} \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \quad (2.171)$$

Совершенно аналогично выводу уравнения для оскулирующего момента прохождения через перицентр  $\tau$  тел с постоянными массами с помощью применения основной операции к соотношению

$$\sqrt{\mu(t)}(t - \tau)p^{-3/2} - J_1 = 0 \quad (2.172)$$

выводится соответствующее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} = & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r^2}{e} \left[ (e \sin v N - \cos v) S' + \frac{p}{r} N T' \right] + \\ & + \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left[ 2J_1 - (e + \cos v) J_2 - \frac{r^2}{p^2 e} \sin v \right] \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\text{где } J_1 = \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}, \quad J_2 = \frac{2}{p^3} \int_0^v r^3 \cos v \, dv, \quad N = \frac{p^2}{r^2} J_2.$$

Итак, дифференциальные уравнения в оскулирующих элементах в случае переменных масс имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2prT' - \frac{p}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T' - (e + \cos v) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u W' \\ \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} i W', \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{p}{e} \cos v S' + \frac{r+p}{e} \sin v T' - r \operatorname{ctg} i \sin u W' - \frac{\sin v}{e} \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r^2}{e} \left[ (e \sin v N - \cos v) S' + \frac{p}{r} N T' \right] + \\ &+ \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left[ 2J_1 - (e + \cos v) J_2 - \frac{r^2}{p^2 e} \sin v \right] \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (2.174)$$

При  $e < 1$  с помощью основной операции в случае переменных масс можно вывести уравнения возмущенного движения в оскулирующих эллиптических элементах  $a, e, i, \Omega, \omega, M_{(0)}$ . Для этого используются известные формулы эллиптического движения

$$p = a(1 - e^2), \quad n^2 a^3 = \mu(t), \quad (2.175)$$

из которых получаются:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2a^2 \left( e \sin v S' + \frac{p}{r} T' \right) - \frac{2a^2 e}{p} (e + \cos v) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{dn}{dt} &= -3na \left( e \sin v S' + \frac{p}{r} T' \right) - \left[ \frac{n}{2} - \frac{2a^2 e}{p} (e + \cos v) \right] \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Применение основной операции к соотношениям

$$E - e \sin E = M, \quad r = a(1 - e \cos E) \quad (2.177)$$

после соответствующих выкладок приводит к равенству

$$\left\{ \frac{dM}{dt} \right\} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left( \operatorname{ctg} v \frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2 \sin v} \frac{da}{dt} \right). \quad (2.178)$$

С учетом уравнений для оскулирующего эксцентриситета из (2.174) и оскулирующей большой полуоси из (2.176) выражение для  $\{dM/dt\}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} [(p \cos v - 2er) S' - (r + p) \sin v T'] + \\ &+ \frac{e + \cos v}{\sin v} \left( \frac{2er}{p} - \cos v \right) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Если зависимость средней аномалии от времени в возмущенном движении в соответствии с формулой (2.141) на стр.150 представляется соотношением  $M = \int_{t_0}^t n dt + M_{(0)}$ , то

применение основной операции к этому соотношению приводит к равенству

$$\frac{dM_{(0)}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er)S' - (r+p) \sin v T'] + \frac{e + \cos v}{\sin v} \left( \frac{2er}{p} - \cos v \right) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \quad (2.180)$$

Если же вместо (2.141) используется зависимость (2.140)  $M = n(t - t_0) + M_0$ , то аналогичным путем получим уравнение

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er)S' - (r+p) \sin v T'] + 3na \left( e \sin v S' + \frac{p}{r} T' \right) (t - t_0) - \left[ \frac{n}{2} - \frac{2a^2 e}{p} (e + \cos v) \right] \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}. \quad (2.181)$$

Выражение для производной  $dM_0/dt$  содержит слагаемое, линейно зависящее от времени. Поэтому  $M_0$  будет быстро меняться со временем при любых (даже малых) значениях возмущающих ускорений  $S', T'$  и  $(d\mu/dt)/\mu$ , а это сопряжено с заметными неудобствами при проведении вычислений. По этой причине, как уже отмечалось, в астрономической практике обычно используется формула (2.141). При этом зачастую величина  $M_{(0)}$ , опуская круглые скобки, обозначается через  $M_0$ , что обычно не приводит к недоразумениям.

Окончательная система дифференциальных уравнений в оскулирующих эллиптических элементах для тел с перемен-

ными массами имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2a^2 e \sin v S' + \frac{2a^2 p}{r} T' - \frac{2a^2 e}{p} (e + \cos v) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\
\frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T' - (e + \cos v) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\
\frac{di}{dt} &= r \cos u W', \\
\frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} i W', \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{p}{e} \cos v S' + \frac{r+p}{e} \sin v T' - r \operatorname{ctg} i \sin u W' - \frac{\sin v}{e} \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}, \\
\frac{dM_{(0)}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er) S' - (r+p) \sin v T'] + \\
&\quad + \frac{e + \cos v}{\sin v} \left( \frac{2er}{p} - \cos v \right) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.182}$$

Уравнения (2.174) и (2.182) были выведены для задачи Гильдена-Мещерского, но их можно использовать и для задачи Мещерского, т. е. с учетом действия реактивных сил. Для этого, определив величины и направления реактивных сил, достаточно включить создаваемые ими ускорения в возмущающие ускорения  $S', T', W'$ , не изменяя сами уравнения.

Во всех выведенных уравнениях для тел как с постоянными, так и переменными массами индексы  $i$  у оскулирующих кеплеровских элементов  $\epsilon_i$ , возмущающих ускорений  $S_i', T_i', W_i'$ , гравитационных параметров  $\mu_i = f(m_0 + m_i)$  и других величин были опущены (см. стр. 137). Поэтому для каждой пары тел  $M_0$  и  $M_i$  (Солнце-планета) уравнения движения выглядят одинаково, хотя в действительности это разные уравнения.

### 2.9.4 Метод вариации произвольных постоянных для канонических систем

Дифференциальные уравнения Ньютона-Эйлера содержат возмущающие ускорения произвольной природы. С их помощью можно включать в рассмотрение даже диссипативные силы. Уравнения движения системы многих тел является частным случаем уравнений Ньютона-Эйлера, когда возмущающие ускорения можно представить частными производными пертурбационной функции.

Для вывода таких уравнений воспользуемся *элементами Якоби*, методом вариации произвольных постоянных для гамильтоновых систем и общими сведениями об уравнении Гамильтона-Якоби.

Начнем с канонических уравнений относительного движения в задаче двух тел. В качестве обобщенных координат выберем сферические координаты:  $r$  - модуль радиуса-вектора,  $\varphi$  - широта, отсчитываемая от плоскости  $M_0xy$  и  $\lambda$  - долгота, отсчитываемая от оси  $M_0x$  (см. рис. 2.1 на стр. 167). С помощью выражения для кинетической энергии  $T = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2)/2$  введем обобщенные импульсы:

$$R = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi}, \quad \Lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}. \quad (2.183)$$

Канонические уравнения задачи двух тел тогда записываются в виде уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial R}, & \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial r}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial \Phi}, & \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial \Lambda}, & \frac{d\Lambda}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (2.184)$$

где  $H_0 = T - U$  - функция Гамильтона задачи двух тел, а  $U = \mu/r$  - силовая функция притяжения.

Уравнения (2.184) возможно проинтегрировать методом Гамильтона-Якоби. В качестве постоянных интегрирования получим новые произвольные постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  - элементы Якоби, связанные с кеплеровскими элементами.

В методе Гамильтона-Якоби используется характеристическая (производящая) функция  $S$ , с помощью которой исходная каноническая система (2.184) преобразуется в новую каноническую систему уравнений

$$\dot{\alpha}_i = 0, \quad \dot{\beta}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.185)$$

с нулевым гамильтонианом

$$F_0 = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.186)$$

Интегрируя уравнения (2.185), получаем невозмущенные элементы Якоби  $\alpha_i = const$  и  $\beta_i = const$ .

Если теперь рассмотреть канонические уравнения возмущенного движения

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.187)$$

где  $H = H_0 + H_1$ ,  $H_1$  - возмущающий гамильтониан, и учесть (2.186), то новый гамильтониан для возмущенного движения запишется в виде

$$F = H + \frac{\partial S}{\partial t} = \left( H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} \right) + H_1 = H_1, \quad (2.188)$$

и уравнения возмущенного движения примут каноническую форму

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.189)$$

где  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  - оскулирующие элементы Якоби.

Эти уравнения выведены методом Лагранжа вариации произвольных постоянных для гамильтоновых систем.

Если в уравнениях (2.189) от оскулирующих элементов Якоби перейти к кеплеровским оскулирующим элементам (формулы перехода будут определены ниже), то получим дифференциальные уравнения возмущенного движения, называемые *уравнениями Лагранжа* в оскулирующих элементах.

### 2.9.5 Элементы Якоби

Каноническое преобразование, осуществляющее переход от исходной системы дифференциальных уравнений (2.184) к системе (2.185), проводится с помощью производящей функции вида  $S(t, r, \varphi, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Учитывая, что задача двух тел является консервативной (так как существует интеграл энергии  $H_0 = h = const$ ), то вместо  $S$  можно ввести другую производящую функцию  $W$ , не зависящую явно от времени:

$$S = W - \alpha_1 t, \quad (2.190)$$

где  $\alpha_1 = h/2$ .

Переход от старых канонических переменных  $r, \varphi, \lambda, R, \Phi, \Lambda$  к новым  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  осуществляется с помощью равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \dot{r} = R, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \beta_1 + t, \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= r^2 \dot{\varphi} = \Phi, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda} &= r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda} = \Lambda, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= \beta_3. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Соотношения (2.191) суть первые интегралы, выражающиеся через обобщенные координаты  $r, \varphi, \lambda, R, \Phi, \Lambda$  и элементы Якоби  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и образующие общий интеграл уравнений (2.189).

Для определения характеристической функции воспользуемся методом Гамильтона-Якоби, сводящим интегрирование канонических уравнений Гамильтона к нахождению *полного интеграла* уравнения в частных производных Гамильтона-Якоби, которое с учетом (2.190), (2.191) и (2.186) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1 = h. \quad (2.192)$$

Полный интеграл уравнения в частных производных первого порядка (2.192) - это такое решение  $W = W(r, \varphi, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , которое кроме координат  $r, \varphi, \lambda$  содержит также три независимые произвольные постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Согласно теореме Якоби об общем интеграле уравнений Гамильтона знание полного интеграла  $W$  позволяет определить общее решение уравнений движения (2.184) из системы равенств (2.191).

Исходя из структуры уравнения Гамильтона-Якоби, его интегрирование можно провести методом разделения переменных, задав функцию  $W$  в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых есть функция только одной координаты:

$$W(r, \varphi, \lambda) = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda). \quad (2.193)$$

Тогда после подстановки (2.193) в уравнение (2.192) последнее приводится к форме:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (2.194)$$

Отсюда для отыскания функций  $W_1(r)$ ,  $W_2(\varphi)$  и  $W_3(\lambda)$  получаются три обыкновенных дифференциальных уравне-

ния первого порядка с одним неизвестным:

$$\begin{aligned} \frac{dW_3}{d\lambda} &= \alpha_3, \\ \left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} &= \alpha_2^2, \\ \left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r} - \frac{2\mu}{r} &= 2\alpha_1. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Интегрируя эти уравнения, получим производящую функцию искомого канонического преобразования (2.191) в виде

$$\begin{aligned} W(r, \varphi, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \alpha_3 \lambda + \\ &+ \int_0^\varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int_{r_\pi}^r \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr, \end{aligned} \quad (2.196)$$

где  $r_\pi = r|_{v=0}$  - фокальное расстояние в перицентре орбиты.

Знание полного интеграла в форме (2.196) позволяет, по теореме Якоби, представить общий интеграл системы канонических уравнений движения (2.184) в виде совокупности шести первых интегралов:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt}, \quad (2.197)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} = r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.198)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \alpha_3 = r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad (2.199)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{r_\pi}^r \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \beta_1, \quad (2.200)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha_2 \int_{r_\pi}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (2.201)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \lambda - \alpha_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (2.202)$$

Соотношения (2.197)-(2.202) представляют неявную форму общего решения задачи двух тел в виде тригонометрических квадратур. С их помощью устанавливается связь между элементами Якоби и кеплеровскими элементами.

Соотношение (2.197) - это интеграл энергии, интеграл (2.202) - это уравнение орбитальной плоскости, (2.201) - полярное уравнение орбиты, (2.200) - уравнение, определяющее положение тела на орбите в момент времени  $t$ . Из структуры интегралов (2.198) и (2.199) видно, что они связаны с интегралом площадей, записанным в виде  $r^2 \dot{u} = \sqrt{\mu p}$ .

Чтобы установить эту связь, рассмотрим прямоугольный сферический треугольник  $NML$ , изображенный на рис. 2.1. Используя известные из сферической тригонометрии теоремы синусов, косинусов и тангенсов, можно записать следующие зависимости между переменными величинами  $\varphi, \lambda, u$ :

$$\sin \varphi = \sin u \sin i, \quad \cos u = \cos \varphi \cos(\lambda - \Omega), \quad \operatorname{tg} \varphi = \sin(\lambda - \Omega) \operatorname{tgi}, \quad (2.203)$$

где  $i, \Omega$  - постоянные кеплеровские элементы.

Дифференцируя по  $t$  первое соотношение в системы (2.203), получим взаимосвязь между  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{u}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi} \frac{du}{dt}, \quad (2.204)$$

а дифференцируя третье равенство системы (2.203) и используя вторую формулу в системе (2.211) и соотношение

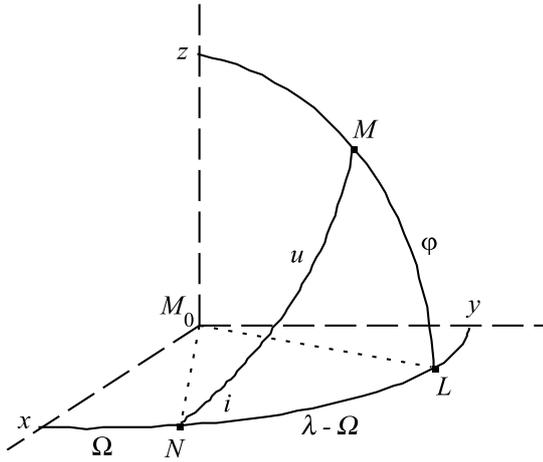


Рис. 2.1. Прямоугольный сферический треугольник  $NML$ . Обозначения: дуга  $\widehat{NM} = u$ , дуга  $\widehat{NL} = \lambda - \Omega$ , дуга  $\widehat{LM} = \varphi$ , угол  $\angle MNL = i$ , угол  $\angle MLN = 90$  градусов.

(2.204), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{\cos^2 \varphi \cos(\lambda - \Omega) \operatorname{tgi}} \frac{d\varphi}{dt} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi \cos(\lambda - \Omega) \operatorname{tgi}} \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi} \frac{du}{dt} = \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} \frac{du}{dt}. \end{aligned} \quad (2.205)$$

С учетом равенств (2.204), (2.205) и соотношения  $r^2 \dot{u} = \sqrt{\mu p}$  первые интегралы (2.198) и (2.199) переписутся в виде

$$\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi} \sqrt{\mu p}, \quad (2.206)$$

$$\alpha_3 = r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dt} = \cos i \sqrt{\mu p}. \quad (2.207)$$

Эти первые интегралы представляют собой проекции векторного интеграла площадей  $\vec{c} = r^2 \dot{u} \vec{e}^*$  соответственно на

направление, перпендикулярное к местному меридиану, т.е. на вектор  $\vec{e}_\lambda = \{\sin \lambda, -\cos \lambda, 0\}$ , и на ось  $M_0z$  - на вектор  $\vec{e}_3 = \{0, 0, 1\}$ , так как выполняются равенства

$$\begin{aligned} r^2 \frac{du}{dt} (\vec{e}^* \vec{e}_\lambda) &= r^2 \frac{du}{dt} \sin i (\sin \Omega \sin \lambda + \cos \Omega \cos \lambda) = \\ &= r^2 \frac{du}{dt} \sin i \cos(\lambda - \Omega) = r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.208) \\ r^2 \frac{du}{dt} (\vec{e}^* \vec{e}_3) &= r^2 \frac{du}{dt} \cos i. \end{aligned}$$

Равенство (2.207) определяет связь элемента Якоби  $\alpha_3$  с кеплеровскими элементами. С ее помощью из (2.206) находится элемент  $\alpha_2$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sqrt{\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} = \sqrt{\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \mu p \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}} = \\ &= \sqrt{\left(r^2 \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi} \frac{du}{dt}\right)^2 + \mu p \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}} = \\ &= \sqrt{\mu p} \sqrt{\frac{\sin^2 i \cos^2 u + \cos^2 i}{\cos^2 \varphi}} = \sqrt{\mu p} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \sqrt{\mu p}. \quad (2.209) \end{aligned}$$

Учитывая зависимость  $h = \mu(e^2 - 1)/p$ , получим связь элемента Якоби  $\alpha_1$  с кеплеровскими в виде

$$\alpha_1 = \frac{h}{2} = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \quad (2.210)$$

Из формулы (2.200) при  $r = r_\pi$  и из (2.202) при  $\varphi = 0$  получим

$$\beta_1 = -\tau, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (2.211)$$

В формуле (2.201) вместо переменной интегрирования  $\varphi$  перейдем к аргументу широты  $u$  в соответствии с (2.204). Тогда, учитывая, что

$$\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}} = \frac{\sin i \cos u}{\cos \varphi}, \quad (2.212)$$

получим

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}} = \int_0^u \frac{\cos u du}{\cos u} = u, \quad (2.213)$$

а (2.201) преобразуется к виду

$$u - \alpha_2 \int_{r_\pi}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (2.214)$$

откуда, полагая  $r = r_\pi$ , получим

$$\beta_2 = \omega. \quad (2.215)$$

Окончательные формулы, связывающие элементы Якоби и кеплеровские элементы для случая движений эллиптического типа, представимы в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1}, \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, & e &= \sqrt{1 + 2\frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\mu^2}}, \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, & \cos i &= \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \\ \beta_1 &= \frac{M_0}{n} - t_0, & \Omega &= \beta_3, \\ \beta_2 &= \omega, & \omega &= \beta_2, \\ \beta_3 &= \Omega, & M_0 &= n\beta_1 + nt_0. \end{aligned} \quad (2.216)$$

С помощью этих зависимостей легко выводятся уравнения возмущенного движения, именуемые уравнениями Лагранжа в оскулирующих элементах. Ограничимся случаем движений эллиптического типа.

### 2.9.6 Уравнения Лагранжа

Орбитальные элементы Якоби являются каноническими элементами, так как уравнения возмущенного движения

тела  $M_i$  в оскулирующих элементах Якоби имеют канонический вид (2.189):

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.217)$$

где  $R = -H_1$ , т.е. мы вновь вернулись к обозначению возмущающего потенциала  $H_1$  через пертурбационную функцию  $R$  (2.68).

Переход к кеплеровским оскулирующим элементам можно осуществить с помощью зависимостей (2.216). Например, с учетом третьего закона Кеплера  $n^2 a^3 = \mu$  получим

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial M_0} \frac{\partial M_0}{\partial \beta_1} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}. \quad (2.218)$$

Для  $\dot{\Omega}$  получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \\ &= -\frac{\partial R}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{\sin i \sqrt{\mu a (1 - e^2)}} \frac{\partial R}{\partial i} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (2.219)$$

Аналогичным путем выводятся все остальные уравнения. Итак, уравнения Лагранжа в оскулирующих эллиптических элементах таковы:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \operatorname{tg} i \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1}{na^2 \operatorname{tg} i \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \quad (2.220)$$

Свести интегрирование этих уравнений к квадратурам не удается. Поэтому для получения решений используются либо численное интегрирование, либо аналитическое представление решений в виде частичных сумм бесконечных рядов.

## 2.10 Приближенное решение уравнений движения

Для проведения общих рассуждений будем записывать уравнения Ньютона-Эйлера или уравнения Лагранжа в оскулирующих элементах в виде

$$\frac{dq_s}{dt} = \varepsilon f_s(t, q_1, q_2, \dots, q_6), \quad (s = 1, 2, \dots, 6), \quad (2.221)$$

где через  $q_s$  обозначены оскулирующие кеплеровские элементы орбиты,  $f_s(t, q_1, q_2, \dots, q_6)$  - соответствующая этому элементу правая часть уравнений возмущенного движения,  $\varepsilon$  - малый параметр.

Роль малого параметра в планетных теориях играет масса возмущающего тела. Если положить малый параметр равным нулю, то уравнения (2.221) превращаются в уравнения невозмущенного движения с хорошо известным кеплеровским решением  $q_s = q_s^{(0)} = const, (s = 1, \dots, 6)$ . Можно рассматривать более общую постановку, когда правые части представляются в виде заданных рядов по степеням малого параметра. Для простоты ограничимся указанным случаем, когда малый параметр входит в правые части в качестве множителя.

Будем искать решение уравнений возмущенного движения (2.221) в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$q_s = q_s^{(0)} + \varepsilon q_s^{(1)} + \varepsilon^2 q_s^{(2)} + \dots, \quad (s = 1, 2, \dots, 6), \quad (2.222)$$

где коэффициенты рядов представляются обычными выра-

жениями для рядов Тейлора

$$q_s^{(k)} = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k q_s}{d\varepsilon^k} \right)_{\varepsilon=0}, \quad (2.223)$$

причем  $q_s^{(0)} = \text{const}$  - невозмущенные значения элементов орбиты.

Эти ряды будем записывать также в виде

$$q_s = q_s^{(0)} + \delta_1 q_s + \delta_2 q_s + \dots, \quad (s = 1, 2, \dots, 6). \quad (2.224)$$

Здесь  $\delta_1 q_s$  определяет возмущения первого порядка (относительно  $\varepsilon$ ),  $\delta_2 q_s$  - возмущения второго порядка и т. д.

Для определения возмущений первого порядка продифференцируем уравнения (2.221) по  $\varepsilon$  и затем положим  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{dq_s^{(1)}}{dt} = f_s(t, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_6^{(0)}). \quad (2.225)$$

Отсюда путем интегрирования получим значения коэффициентов при первой степени малого параметра  $\varepsilon$  в рядах (2.222)

$$q_s^{(1)} = \int_{t_0}^t f_s(t, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_6^{(0)}) dt \quad (2.226)$$

и выражения для оскулирующих элементов  $q_s$  в первом приближении

$$q_s \simeq q_s^{(0)} + \varepsilon q_s^{(1)} = q_s^{(0)} + \delta_1 q_s. \quad (2.227)$$

Произвольные постоянные, возникающие при интегрировании, являются несущественными и их можно считать равными нулю (или включенными в постоянные значения  $q_s^{(0)} = \text{const}$ ).

Для определения возмущений второго порядка дифференцируем уравнения (2.221) по  $\varepsilon$  дважды, после чего опять полагаем  $\varepsilon = 0$ . Тогда получим

$$\frac{dq_s}{dt} = f_s(t, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_6^{(0)}) + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial f_s}{\partial q_i} \right)_{\varepsilon=0} q_i^{(1)}. \quad (2.228)$$

С помощью последующего интегрирования определяем коэффициенты при второй степени малого параметра  $\varepsilon$  в рядах (2.222)

$$q_s^{(2)} = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial f_s}{\partial q_i} \right)_{\varepsilon=0} q_i^{(1)} dt \quad (2.229)$$

и выражения для оскулирующих элементов  $q_s$  во втором приближении

$$q_s \simeq q_s^{(0)} + \varepsilon q_s^{(1)} + \varepsilon^2 q_s^{(2)} = q_s^{(0)} + \delta_1 q_s + \delta_2 q_s. \quad (2.230)$$

Подобным образом можно определить в принципе любое конечное число последующих членов рядов (2.222).

Существуют и другие методы определения возмущений. Можно, например, воспользоваться методом последовательных приближений Пикара. В качестве нулевого приближения в этом методе берутся невозмущенные кеплеровские элементы  $q_s^{(0)}$ . Для определения возмущений первого порядка в правых частях уравнений возмущенного движения все оскулирующие элементы принимаются равными невозмущенным кеплеровским значениям и проводится первое интегрирование. Тогда для  $q_s^{(1)}$  получается выражение (2.226). Для определения возмущений второго порядка в правых частях уравнений (2.221) оскулирующие элементы заменяются уже полученным приближением  $q_s = q_s^{(0)} + \delta_1 q_s$  и также проводится интегрирование. Эту процедуру можно продолжать вплоть до возмущений сколь угодно больших порядков.

### 2.10.1 Аналитическая структура решений

Пертурбационная функция  $R$ , входящая в правые части уравнений Лагранжа в оскулирующих элементах, зависит от координат и компонент скорости, которые для эллиптического типа движения разложимы в ряды Фурье. Поэтому все правые части уравнений Лагранжа также можно

представить в виде разложений в ряды Фурье. Тогда уравнения (2.221) можно записать в общем виде

$$\frac{dq_s}{dt} = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} [A_s^{(k)} \cos kM + B_s^{(k)} \sin kM], \quad (2.231)$$

где  $A_s^{(k)}$  и  $B_s^{(k)}$  - известные функции пяти элементов  $a, e, i, \Omega, \omega$ . Шестой элемент  $M_0$  входит только посредством средней аномалии  $M = n(t - t_{(0)}) + M_0$ , где  $M_0$  - средняя аномалия в эпоху  $t_{(0)}$ , обозначение которой временно изменено, чтобы избежать сходства с начальным моментом времени  $t_0$ , используемым в формулах (2.226) и (2.229).

После подстановки в правые части начальных значений элементов орбиты, коэффициенты  $A_s^{(k)}$  и  $B_s^{(k)}$  становятся постоянными. Тогда путем интегрирования по времени  $t$  получаются *возмущения первого порядка*:

$$\delta_1 q_s = \varepsilon A_{s0}^{(0)} (t - t_0) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_s^{(k)}}{kn^{(0)}} \sin kM - \frac{B_s^{(k)}}{kn^{(0)}} \cos kM \right], \quad (2.232)$$

где  $n^{(0)}$  - среднее движение в начальный момент времени  $t_0$ .

Первый член в этом разложении, содержащий  $A_{s0}^{(0)}$ , называют *вековым возмущением* первого порядка, или *вековым неравенством*, а тригонометрические члены - *периодическими возмущениями* первого порядка.

Возмущения второго и более высоких порядков получаются в виде

$$\delta_{k_1} q_s = \varepsilon^{k_1} (t - t_0)^{k_2} [A^{(k)} \sin kM + B^{(k)} \cos kM], \quad (2.233)$$

$(k_1 \geq 1, k_2 \geq 0, k \geq 0).$

Общее выражение для любого оскулирующего элемента тогда представится формулой

$$q_s = q_s^{(0)} + \sum_{k_1, k_2, k} \varepsilon^{k_1} (t - t_0)^{k_2} [A^{(k)} \sin kM + B^{(k)} \cos kM], \quad (2.234)$$

где наряду с вековыми и периодическими возникают *смешанные возмущения*, представляющиеся периодическими колебаниями с неограниченно растущей амплитудой.

Для изучения влияния возмущающего тела  $M_j$  на движение рассматриваемого возмущаемого тела  $M_s$  запишем разложение пертурбационной функции в виде ряда Фурье:

$$R = \sum_{k_s, k_j = -\infty}^{\infty} [A_{k_s k_j} \cos(k_s M_s + k_j M_j) + B_{k_s k_j} \sin(k_s M_s + k_j M_j)]. \quad (2.235)$$

Коэффициенты Фурье этих рядов, в свою очередь, можно разложить в ряды по степеням малых эксцентриситетов и наклонностей:

$$\begin{Bmatrix} A_{k_s k_j} \\ B_{k_s k_j} \end{Bmatrix} = \sum_{k_{se}, k_{je}, k_{si}, k_{ji}} \begin{Bmatrix} A_{k_s k_j}^{(k_{se}, k_{si})} \\ B_{k_s k_j}^{(k_{je}, k_{ji})} \end{Bmatrix} e_s^{k_{se}} e_s^{k_{je}} i_s^{k_{si}} i_s^{k_{ji}}, \quad (2.236)$$

где  $A_{k_s k_j}^{(k_{se}, k_{si})}$  и  $B_{k_s k_j}^{(k_{je}, k_{ji})}$  зависят только от больших полуосей  $a_s$  и  $a_j$ .

Точно такую же структуру имеют разложения правых частей дифференциальных уравнений возмущенного движения, которые содержат производные пертурбационной функции. Сохраняя те же обозначения для коэффициентов этих разложений, формулу (2.234) можно записать в виде

$$q_s = q_s^{(0)} + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_s, k_j} \frac{\varepsilon^{k_1} (t - t_0)^{k_2}}{(k_s n_s + k_j n_j)^{k_3}} [A_{k_s k_j} \sin(k_s M_s + k_j M_j) + B_{k_s k_j} \cos(k_s M_s + k_j M_j)]. \quad (2.237)$$

Периодические возмущения, входящие в эту формулу, подразделяют на *короткопериодические*, для которых частота  $k_s n_s + k_j n_j$  сравнима с  $n_s$  (или  $n_j$ ) и *долгопериодические* возмущения, характеризующиеся малой частотой ( $k_s n_s + k_j n_j \ll \ll n_s$ ) и большой амплитудой.

## 2.11 Теоремы Лапласа

Важную роль в астрономии играют теоремы, характеризующие некоторые качественные особенности движений планет в Солнечной системе.

### 2.11.1 Теорема Лапласа о возмущениях больших полуосей

Теорема имеет следующую формулировку. Если начальные значения средних движений  $n_s^{(0)}$  всех тел  $M_s$  таковы, что для любой пары тел  $M_s$  и  $M_j$  величина  $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$  обращается в нуль только при  $k_s = k_j = 0$  (т.е. средние движения планет в начальный момент несоизмеримы), то возмущения первого порядка больших полуосей оскулирующих орбит планет не содержат вековых членов.

Для доказательства теоремы сначала заметим, что

$$k_s M_s + k_j M_j = (k_s n_s + k_j n_j)(t - t_0) + k_s M_{s0} + k_j M_{j0}, \quad (2.238)$$

где  $M_{s0}$  и  $M_{j0}$  - средние аномалии возмущаемого и возмущающего тела в эпоху  $t_0$ .

Обращаясь теперь к уравнению Лагранжа для оскулирующей большой полуоси

$$\frac{da_s}{dt} = \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial M_{s0}}, \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (2.239)$$

получим утверждение теоремы, если покажем, что пертурбационная функция  $R_s$  не зависит от  $M_{s0}$ . Для этого заметим, что вековые члены первого порядка в больших полуосях появятся только тогда, когда под знаками синусов и косинусов не содержится время, т.е. при  $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)} = 0$ . По условию теоремы такое равенство возможно только при  $k_s = k_j = 0$ . Но учитывая, что в соответствии с (2.238) элемент  $M_{s0}$  входит в уравнение (2.239) только с множителем

$k_s$ , который равен нулю, получаем  $\partial R_s / \partial M_{s0} = 0$ , и, следовательно,  $a_s = a_s^{(0)} = \text{const}$ . Таким образом, вековых возмущений первого порядка в больших полуосях в самом деле нет.

### 2.11.2 Теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы

Формулировка теоремы. Пусть  $a_s^{(0)}$ ,  $e_s^{(0)}$  и  $i_s^{(0)}$  - начальные значения больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей. Тогда если:

- значения  $e_s^{(0)}$  и  $i_s^{(0)}$  - малые величины,
- значения  $a_s$  в течении некоторого промежутка времени  $(t_0, T)$  мало отличаются от своих начальных значений  $a_s^{(0)}$ ,
- произведения  $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$  суть величины одного и того же порядка,

то для всех значений времени в промежутке  $(t_0, T)$  величины  $e_s$  и  $i_s$  будут также оставаться малыми.

Доказательство. Все малые величины, фигурирующие в условиях теоремы, считаются одного (первого) порядка малости. Поэтому, используя известные обозначения Пеано и Коши, далее будем их обозначать одной и той же, вообще говоря, переменной величиной  $O(\varepsilon)$ , а величины второго и более высоких порядков малости -  $o(\varepsilon)$ . В частности, учитывая предыдущую теорему Лапласа, для больших полуосей орбит планет можем записать равенство  $a_s = a_s^{(0)} + o(\varepsilon)$ , справедливое в промежутке  $(t_0, T)$ .

Основным уравнением, с помощью которого проводится доказательство теоремы, является интеграл момента количества движения задачи многих тел, записанный в барицентрической системе координат в виде:

$$\sum_{s=0}^n m_s \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s = m_0 \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{s=1}^n m_s \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s = \vec{c}, \quad (2.240)$$

где выделенные члены с индексом "0" характеризуют вклад

Солнца в полный кинетический момент  $\vec{c}$ . Чтобы оценить этот вклад, воспользуемся интегралами движения центра масс системы также в барицентрической системе координат

$$\sum_{s=0}^n m_s \vec{r}_s = m_0 \vec{r}_0 + \sum_{s=1}^n m_s \vec{r}_s = 0, \quad \sum_{s=0}^n m_s \dot{\vec{r}}_s = m_0 \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{s=1}^n m_s \dot{\vec{r}}_s = 0. \quad (2.241)$$

Отсюда видно, что величины  $\vec{r}_0$  и  $\dot{\vec{r}}_0$  имеют первый порядок малости относительно параметра  $\varepsilon$ , а величина  $m_0 \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0$  - второй:

$$\vec{r}_0 = -\frac{1}{m_0} \sum_{s=1}^n m_s \vec{r}_s = O(\varepsilon), \quad \dot{\vec{r}}_0 = -\frac{1}{m_0} \sum_{s=1}^n m_s \dot{\vec{r}}_s = O(\varepsilon), \\ m_0 \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 = o(\varepsilon). \quad (2.242)$$

Тогда с точностью до членов первого порядка малости включительно интегралы площадей (2.240) принимают следующий вид

$$\sum_{s=1}^n m_s \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s = \vec{c} + o(\varepsilon) \quad (2.243)$$

или, переходя к оскулирующим кеплеровским элементам, получим

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s p_s} \vec{e}_s^* = \vec{c} + o(\varepsilon), \quad (2.244)$$

где  $\vec{e}_s^* = \{\sin \Omega_s \sin i_s, \cos \Omega_s \sin i_s, \cos i_s\}$  - единичный вектор момента количества движения тела  $M_s$ , а  $\mu_s = f(m_0 + m_s)$  - гравитационный параметр системы Солнце-планета.

Выберем теперь в качестве плоскости  $M_0xy$  плоскость Лапласа, перпендикулярную к вектору  $\vec{c}$ . Тогда модуль интеграла площадей предстанет в виде

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s p_s} \cos i_s = c + o(\varepsilon). \quad (2.245)$$

Учитывая зависимости  $p_s = a_s(1 - e_s^2)$  и  $a_s = a_s^{(0)} + o(\varepsilon)$ , равенство (2.245) перепишем в виде

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s a_s^{(0)}} \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s = c + o(\varepsilon). \quad (2.246)$$

Введем обозначение

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s a_s^{(0)}} = c_0 \quad (2.247)$$

и, вычитая (2.246) из (2.247)

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s a_s^{(0)}} [1 - \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s] = c_0 - c + o(\varepsilon), \quad (2.248)$$

приходим к равенству

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s a_s^{(0)}} \frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s} = c_0 - c + o(\varepsilon). \quad (2.249)$$

Полагая в этом уравнении  $t = t_0$  и учитывая условия теоремы  $e_s^{(0)} = O(\varepsilon)$  и  $i_s^{(0)} = O(\varepsilon)$ , установим, что разность  $c_0 - c$  является малой порядка  $o(\varepsilon)$ , так как:

$$c_0 - c = \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s a_s^{(0)}} \frac{\sin^2 i_s^{(0)} + e_s^{(0)2} \cos^2 i_s^{(0)}}{1 + \sqrt{1 - e_s^{(0)2}} \cos i_s^{(0)}} = o(\varepsilon). \quad (2.250)$$

Отсюда следует, что левая часть уравнения (2.249) будет также малой величиной порядка  $o(\varepsilon)$  в промежутке времени  $(t_0, T)$ :

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s a_s^{(0)}} \frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s} = o(\varepsilon), \quad (2.251)$$

что, в свою очередь, возможно только при малых величинах  $e_s = O(\varepsilon)$  и  $i_s = O(\varepsilon)$ . Это и доказывает теорему Лапласа.

Доказанные теоремы Лапласа имеют важное значение в небесной механике и, вообще, в астрономии. Ввиду отсутствия вековых возмущений первого порядка больших полуосей орбит планет можно утверждать, что эксцентриситеты и наклоны планет будут оставаться малыми, по крайней мере, в течение нескольких тысячелетий.

Однако эти результаты нельзя распространять на очень большие (космогонические) промежутки времени.

Также нельзя применять теоремы Лапласа к малым телам Солнечной системы. Условия теоремы Лапласа для малых тел (астероидов, комет и т. п.) не выполняются ввиду того, что произведения  $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$  для этих тел будут величинами значительно большего порядка малости, чем для больших планет.

Существенным добавлением к теореме Лапласа об устойчивости Солнечной системы является теорема Арнольда, которая утверждает, что при выполнении тех же условий теоремы Лапласа возмущенные движения планет для большинства начальных условий в смысле меры Лебега имеют условно-периодический характер на бесконечном интервале времени  $-\infty < t < \infty$ . Тем самым можно утверждать, что движения планет устойчивы в смысле Лагранжа для большинства начальных условий не только в первом, но и в любом приближении. Можно считать, что с вероятностью близкой к единице Солнечная система устойчива по Лагранжу. Только для начальных условий меры нуль, соответствующих резонансным соотношениям между средними движениями планет, условно-периодический характер движений не гарантирован, и теорема Арнольда не "работает".

## Глава 3

# ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

В одном из вариантов этой неинтегрируемой задачи известен интеграл Якоби, с помощью которого можно получить результаты более сильные, чем в общей задаче трех тел. Поэтому ограниченная задача трех тел достойна отдельного рассмотрения благодаря многочисленным ее приложениям.

### 3.1 Постановка задачи

Слово *ограниченная* в названии задачи означает, что на задачу трех тел наложено некоторое ограничение. Это ограничение обычно заключается в том, что масса одного из тел имеет исчезающе малое значение. Если хотят подчеркнуть отличие ограниченной задачи трех тел от исходной задачи трех тел, то последнюю называют *общей* задачей трех тел. Ограниченная задача получается из общей задачи путем предельного перехода, когда масса одного тела стремится к нулю. Это тело обычно называется телом малой (или "нулевой") массы, а тела с конечными массами называются *основными*.

Физически ясно, что равные по величине и противоположно направленные силы притяжения между телом малой массы и одним из основных тел создают существенно различные ускорения в их движениях: исчезающе малое для основного тела и конечное для малого тела. Поэтому можно считать, что движения основных тел не испытывают никаких возмущений со стороны тела малой массы, т.е. движутся под действием только взаимного притяжения по законам задачи двух тел. Таким образом, ограниченная задача трех тел представляет собой задачу об определении движения тела малой массы в переменном гравитационном поле, создаваемом основными телами, движущимися по законам задачи двух тел.

В зависимости от того по каким траекториям движутся основные тела ограниченная задача трех тел подразделяется на:

- *круговую*, когда основные тела движутся по круговым орбитам,
- *эллиптическую*, при движении основных тел по эллиптическим орбитам,
- *параболическую* ограниченную задачу трех тел,
- *гиперболическую* ограниченную задачу и
- *прямолинейную* задачу, в свою очередь подразделяющуюся на прямолинейно эллиптическую, параболическую и гиперболическую ограниченные задачи трех тел.

## 3.2 Ограниченная круговая задача трех тел

Эта задача представляет наибольший интерес, так как допускает существование нового первого интеграла уравнений движения.

### 3.2.1 Уравнения движения во вращающейся системе координат

Введем барицентрическую прямоугольную систему координат  $Gxyz$ , вращающуюся с постоянной угловой скоростью  $\vec{n}$ , равной угловой скорости обращения основных тел относительно друг друга. Ось  $Gx$  выберем так, чтобы она всегда проходила через основные тела по направлению вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Ось  $Gz$  направим по вектору  $\vec{n}$ , а ось  $Gy$  выберем так, чтобы она дополняла систему до правой. Не ограничивая общности будем считать, что массы основных тел связаны неравенством  $m_1 \geq m_2$ .

Тогда координаты основных тел  $M_1$  и  $M_2$  будут:  $M_1(x_1, 0, 0)$  и  $M_2(x_2, 0, 0)$ , а тело малой массы  $M$  имеет текущие координаты  $M(x, y, z)$ . Плоскость  $Gxy$  является плоскостью движения основных тел, а вектор угловой скорости направлен перпендикулярно к этой плоскости  $\vec{n} = \{0, 0, n\}$ .

Если обозначим расстояния от основных тел до тела малой массы соответственно через  $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$  и  $r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}$ , а массу тела  $M$  через  $m$ , то силовую функцию можем записать в виде  $U = fm \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$ .

Уравнения движения представимы в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.1)$$

где  $L = T + U$  - функция Лагранжа,  $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ .

Для определения кинетической энергии  $T$  вычислим абсолютную скорость  $\vec{V}_a$  в виде суммы относительной  $\vec{V}$  и переносной скоростей  $\vec{V}_p$ :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \{x, y, z\}, \quad \vec{V} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}, \quad \vec{V}_p = \vec{n} \times \vec{r}, \\ \vec{V}_a &= \vec{V} + \vec{V}_p = \{\dot{x} - ny, \dot{y} + nx, \dot{z}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда кинетическая энергия  $T = m\vec{V}_a^2/2$  запишется в виде  $T = m[(\dot{x} - ny)^2 + (\dot{y} + nx)^2 + \dot{z}^2]/2$ . Масса малого тела фигурирует в качестве множителя в левой и правой частях уравнений Лагранжа. Поэтому на нее можно сократить или считать  $m = 1$  и в дальнейшем не выписывать. В принятых обозначениях уравнения (3.1) таковы:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - n\dot{y} - n(\dot{y} + nx) - \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \ddot{y} + n\dot{x} + n(\dot{x} - ny) - \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ \ddot{z} - \frac{\partial U}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Если ввести вспомогательную функцию, иногда называемую *функцией Якоби*,

$$\Omega = n^2 \frac{x^2 + y^2}{2} + U,\tag{3.4}$$

то уравнения движения малого тела принимают вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} = n^2 x + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} = n^2 y + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Эта система дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающая движение малого тела в ограниченной задаче трех тел. В ограниченной круговой задаче трех тел угловая скорость остается всегда постоянной величиной,  $n = const$ .

### 3.2.2 Интеграл Якоби

Умножим уравнения (3.5) соответственно на  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  и сложим почленно. В результате получим

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{d\Omega}{dt}. \quad (3.6)$$

Здесь правую часть удалось представить в виде полной производной по времени только благодаря тому, что функция  $\Omega$  не зависит явно от времени, т. е.  $\partial\Omega/\partial t = 0$ . Для эллиптической задачи этого сделать не удастся, ввиду явной зависимости угловой скорости от времени. Именно поэтому полученный далее первый интеграл существует только в рамках ограниченной круговой задачи трех тел.

Интегрируя равенство (3.6) приходим к интегралу Якоби

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \Omega + h \quad \text{или} \quad V^2 = 2\Omega - C, \quad (3.7)$$

где  $C = -2h$  - произвольная постоянная интегрирования, именуемая *постоянной Якоби*.

Часто в ограниченной круговой задаче трех тел используют специальную стандартную систему единиц измерения. А именно, за единицу длины принимается расстояние между основными телами, т. е.  $x_2 - x_1 = 1$ , за единицу массы - сумма масс, т. е.  $m_1 + m_2 = 1$ , и сами массы тогда будут  $1 - \mu = m_1/(m_1 + m_2)$  и  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ , ( $\mu \leq 1/2$ ), а единица времени выбирается так, чтобы равнялась единице универсальной гравитационной постоянной,  $f = 1$ . Из третьего закона Кеплера  $n^2 = f(m_1 + m_2)/a^3$  задачи двух тел, получим, что при выбранных единицах измерения угловая скорость также имеет значение, равное единице:  $n = 1$ . Учитывая соотношение  $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ , которое выполняется в барицентрической системе координат, для координат основных тел в выбранной системе единиц измерения получим значения:  $x_1 = -\mu$  и  $x_2 = 1 - \mu$ .

Для таких единиц измерения функции  $U$  и  $\Omega$  представ-

ляются в виде

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + U, \quad U = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.8)$$

а уравнения движения в развернутом виде суть:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x + \mu - 1),$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y \left( 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right), \quad (3.9)$$

$$\ddot{z} = -z \left( \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right).$$

Введение такой стандартной системы единиц измерения показывает, что уравнения движения для ограниченной круговой задачи зависят только от одного свободного параметра  $\mu$ . Это так называемый *массовый параметр* - безразмерная масса меньшего из главных тел.

### 3.2.3 Точки либрации

Попробуем найти *стационарные* частные решения уравнений движения (3.9), т.е. такие решения, для которых координаты во вращающейся системе  $Gxyz$  являются постоянными величинами  $x = const$ ,  $y = const$  и  $z = const$ . Для этого подставим эти (пока неизвестные) константы в уравнения (3.9). Левые части этих уравнений обратятся в нули и для определения действительных постоянных значений координат  $x, y, z$  получаются три алгебраических уравнения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x + \mu - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y \left( 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -z \left( \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0.$$

Имеются три качественно различные возможности удовлетворения этих уравнений постоянными значениями координат:

- (i).  $z = 0, x \neq 0, y = 0$  - это точки, лежащие на оси  $Gx$ ,
- (ii).  $z = 0, x \neq 0, y \neq 0$  - это точки, лежащие на плоскости  $Gxy$ ,
- (iii).  $z = \pm\infty, x = 0, y = 0$  - это бесконечно удаленные точки, лежащие на оси  $Gz$ .

Никаких других действительных стационарных решений уравнений (3.10) не существует.

Рассмотрим все возможности по-порядку. В случае (i) второе и третье уравнения в системе (3.10) удовлетворяются тождественно, и задача сводится к определению корней первого уравнения в (3.10) после предварительной подстановки в него  $y = z = 0$ , т. е.  $r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2}$ . Тогда левую часть этого уравнения можно представить в виде функции одной переменной  $x$

$$\varphi(x) = x - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x + \mu - 1) = 0. \quad (3.11)$$

Производная функции  $\varphi(x)$  всегда положительна:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 + 3\frac{1 - \mu}{r_1^5}(x + \mu)^2 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} + 3\frac{\mu}{r_2^5}(x + \mu - 1)^2 - \\ &\quad - \frac{\mu}{r_2^3} = 1 + 2\frac{1 - \mu}{r_1^3} + 2\frac{\mu}{r_2^3} > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Функция  $\varphi(x)$  имеет две вертикальные асимптоты (в точках разрыва второго рода)  $x = -\mu$ ,  $x = 1 - \mu$  и одну наклонную  $\varphi(x) = x$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\mu \pm 0} \varphi(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1 - \mu \pm 0} \varphi(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 1 \mp 0. \quad (3.13)$$

Отсюда сразу следует, что уравнение (3.11) имеет три действительных корня

$$-\infty < x_1 < -\mu, \quad -\mu < x_2 < 1 - \mu, \quad 1 - \mu < x_3 < \infty. \quad (3.14)$$

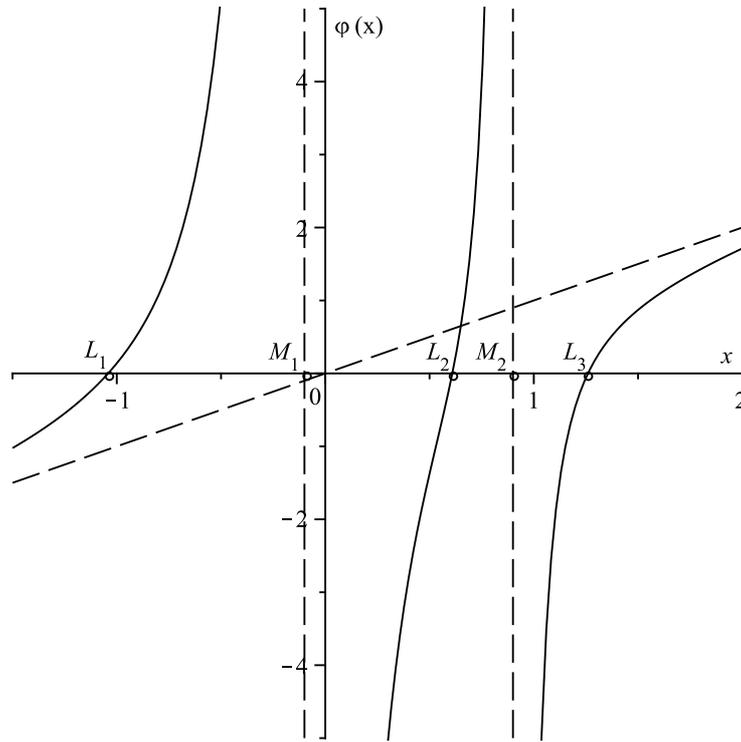


Рис. 3.1. Функция  $\varphi(x)$  при  $\mu = 0.1$ . Обозначения: штриховые линии - наклонная и вертикальные асимптоты функции  $\varphi$ ,  $M_1, M_2$  - основные тела,  $L_1, L_2, L_3$  - прямолинейные точки либрации (нули функции  $\varphi$ ).

Эти решения на вращающейся оси  $x$  определяют три *прямолинейные (коллинеарные)* точки либрации

$$L_1 = (x_1, 0, 0), \quad L_2 = (x_2, 0, 0), \quad L_3 = (x_3, 0, 0). \quad (3.15)$$

График функции  $\varphi(x)$  для  $\mu = 0.1$  представлен на рис. 3.1.

Уравнение (3.11) невозможно решить в конечном виде. Его можно свести к уравнению пятой степени относительно  $x$  с разными коэффициентами для различных точек. Вывод таких уравнений приводится в учебнике [5]. В монографии [9] приводятся 11-значные таблицы координат точек

$L_1, L_2, L_3$  для значений  $\mu$ , изменяющихся с шагом не более 0,01, а также для различных конкретных пар тел Солнечной системы, выбираемых в качестве основных.

Более удобный вид алгебраических уравнений для численного определения абсцисс прямолинейных точек либрации получается при переходе от барицентрической системы координат к относительной.

Можно получить решения уравнения (3.11) в виде рядов по степеням  $\mu$  или  $\mu^{1/3}$  (см. [5]), однако удовлетворительную точность они дают только для достаточно малых значений  $\mu$ . В условиях широкой компьютеризации вычислений наиболее простой путь для решения нелинейного уравнения (3.11) - численное решение этого уравнения одним из известных методов определения корней нелинейных уравнений. Необходимо только следить за разделением корней в соответствии с неравенствами (3.14).

Рассмотрим теперь вторую возможность (ii). В этом случае стационарные решения определяются первыми двумя уравнениями системы (3.10), в которые следует подставить  $z = 0$ . Эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} x \left( 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) + \mu(1-\mu) \left( -\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) &= 0, \\ 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из первого уравнения этой системы получим  $r_1 = r_2$ , а затем из второго окончательно вытекает, что

$$r_1 = r_2 = 1. \quad (3.17)$$

Учитывая, что в принятой системе единиц измерения расстояние между основными телами  $M_1$  и  $M_2$  равно единице, полученный результат означает, что точка  $L$ , определяемая решением (3.17), вместе с основными телами образует на плоскости  $xy$  равносторонний треугольник  $M_1M_2L$ , длины всех сторон которого равны единицам. Легко заметить, что на плоскости  $xy$  существуют две такие точки - одна  $L_4$  при

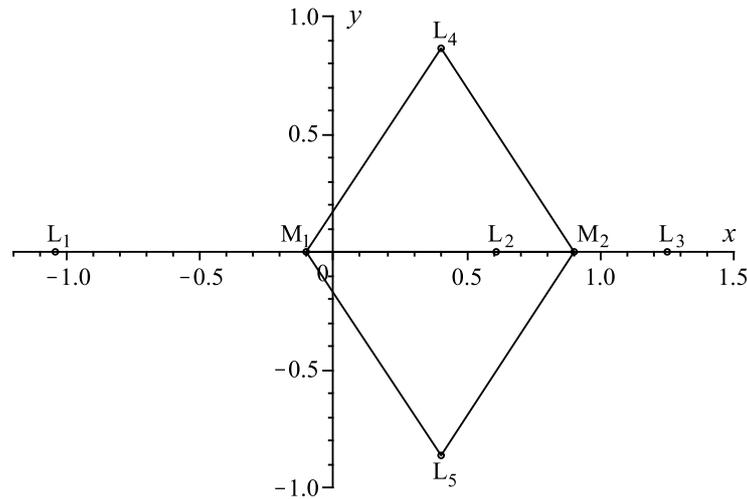


Рис. 3.2. Прямолинейные ( $L_1, L_2, L_3$ ) и треугольные ( $L_4, L_5$ ) точки либрации.

$y > 0$ , вторая  $L_5$  при  $y < 0$ . Такие стационарные точки в плоскости  $Gxy$  называются *треугольными* точками либрации:

$$L_4 = \left( \frac{1 - 2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad L_5 = \left( \frac{1 - 2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right). \quad (3.18)$$

Впервые прямолинейные решения были обнаружены в 1767 г. Эйлером. Поэтому их называют *эйлеровыми* решениями. Треугольные решения были найдены Лагранжем в 1772 г., их называют *лагранжевыми* решениями. Аналогично называют и соответствующие точки либрации. Впрочем, иногда всю совокупность этих решений называют лагранжевыми и даже *лапласовыми*, что не вполне корректно. Нумерация прямолинейных точек либрации  $L_1, L_2, L_3$  также не является общепринятой.

На рис. 3.2 показано расположение прямолинейных и треугольных точек либрации на плоскости  $Gxy$ .

Исследование возможности (iii) не представляет труда. В

этом случае получаются несобственные, бесконечно удаленные вдоль оси  $z$  точки либрации

$$L_{\pm\infty} = (0, 0, \pm\infty). \quad (3.19)$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой удовлетворения уравнений (3.10) координатами (3.19).

### 3.2.4 Поверхности нулевой скорости или поверхности Хилла

Общего интеграла уравнений (3.10) в известных функциях не существует. Однако существует интеграл Якоби, который позволяет в пространстве координат  $xuz$  отделить области возможности движений *пассивно гравитирующей массы* от областей недоступности. Эти области разделяются *поверхностями нулевой (относительной) скорости* или *поверхностями Хилла*.

Для отыскания областей возможности движений воспользуемся неравенством  $V^2 \geq 0$ , справедливым для любых действительных движений. Из этого условия и интеграла Якоби (3.7) следует неравенство, определяющее область возможности движений в виде

$$2\Omega \geq C \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} \geq C. \quad (3.20)$$

Если постоянная энергии неотрицательна  $h \geq 0$  (т.е.  $C \leq 0$ ), то областью возможности движения является все пространство  $xuz$ , а область недоступности отсутствует. Область недоступности появляется только при  $C > 0$ , но это наиболее интересный с точки зрения астрономических приложений случай, так как относится к пространственно ограниченному движению эллиптического типа.

Уравнения поверхностей нулевой скорости получаются из (3.20) заменой знака неравенства на равенство

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} = C. \quad (3.21)$$

Равенство (3.21) в пространстве  $xuz$  определяет семейство поверхностей с одним параметром  $0 < C < \infty$ . Для построения семейства поверхностей следует:

- найти все особые точки поверхностей этого семейства,
- определить значения постоянной Якоби в точках либрации  $C_1, C_2, C_3, C_4 = C_5, C_{\pm\infty} = 0$ ,
- проверить справедливость цепочки неравенств между ними:  $\infty > C_2 > C_3 > C_1 > C_4 = C_5 > C_{\pm\infty} = 0$ ,
- установить тип особых точек указанных поверхностей,
- изучить поведение поверхностей Хилла в окрестности этих точек,
- исследовать эволюцию поверхностей Хилла при изменении постоянной Якоби  $C$  от  $\infty$  до 0.

Для отыскания особых точек необходимо записать условия их существования - это точки, в которых отсутствует однозначная касательная плоскость у поверхностей Хилла. Такими точками являются те, для которых выполняются условия

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0, \quad (F)_0 = C, \quad (3.22)$$

где нижний индекс  $(\dots)_0$  означает, что функция  $F$  и ее частные производные вычисляются в рассматриваемой особой точке.

С учетом того, что  $F = 2\Omega$ , и сравнение равенств (3.22) и (3.10) приводит к полному совпадению особых точек с точками либрации. Таким образом, особыми точками семейства поверхностей (3.21) являются точки либрации

$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_{\pm\infty}. \quad (3.23)$$

Если координаты этих точек подставить в (3.21), то значения постоянной Якоби, соответствующее этим точкам, суть:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_{\pm\infty}. \quad (3.24)$$

Кроме того, особыми точками являются также точки, в которых обращается в бесконечность функция  $F(x, y, z)$  и

все ее частные производные любого порядка. Такими точками являются основные тела-точки  $M_1$  и  $M_2$ . Значение постоянной Якоби в этих точках равно бесконечности  $C_{M_{12}} = +\infty$ .

Непосредственной проверкой можно установить, что для значений постоянных Якоби в особых точках всегда (при любом  $0 < \mu \leq 1/2$ ) имеют место неравенства

$$\infty > C_{M_{12}} > C_2 > C_3 \geq C_1 > C_4 = C_5 > C_{\pm\infty} = 0, \quad (3.25)$$

где знак равенства между  $C_3$  и  $C_1$  появляется только при  $\mu = 1/2$ , т. е. для так называемой "копенгагенской задачи" трех тел.

Для установления типа особой точки (кроме точек  $M_1$  и  $M_2$ ) рассмотрим первые члены разложения функции  $F(x, y, z)$  в ряд Тейлора в окрестности особой точки  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = & F(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 (y - y_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_0 (z - z_0)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 (x - x_0)(y - y_0) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)_0 (y - y_0)(z - z_0) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\right)_0 (z - z_0)(x - x_0) + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Сначала вспомним какие вообще могут существовать особые точки у произвольных семейств трехмерных поверхностей. Все частные производные первого порядка в особых точках в разложении (3.26) обращаются в нуль в силу (3.22). Если в (3.26) существуют отличные от нуля частные производные второго порядка, то получаются наиболее простые особые точки второго порядка, если же все частные производные второго порядка обращаются в нуль, то особые точки будут определяться членами более высокого порядка в разложении Тейлора (3.26). Это точки более сложного типа, третьего или более высокого порядка. Непосредственным

вычислением частных производных второго порядка можно убедиться, что все особые точки (3.23) имеют второй порядок. Значит, в окрестности такой особой точки поверхности Хилла имеют вид, близкий к поверхностям второго порядка.

Какие конкретно поверхности второго порядка здесь могут иметь место? Для этого исключим из рассмотрения эллиптический и гиперболический параболоиды, так как их канонические уравнения должны содержать члены первого порядка, что невозможно из-за равенств (3.22). Кроме того, исключаются из рассмотрения эллиптический, гиперболический цилиндры и пара пересекающихся плоскостей, так как для этих поверхностей одна из частных производных первого порядка не равна нулю. Такие поверхности могут существовать только в окрестности непрерывной линии особых точек (особой линии), в то время как все особые точки нашей задачи являются изолированными. Исключается также возможность существования двух совпадающих или параллельных плоскостей, что может быть только для непрерывного множества особых точек, лежащих на некоторой поверхности (особая поверхность).

Поэтому особые точки рассматриваемой задачи могут быть либо точками типа "конус", либо точками типа "центр". Учитывая, что центр можно рассматривать как мнимый конус (т.е. действительной является только вершина конуса), всю совокупность таких особых точек называют *коническими особыми точками*. Сама особая точка расположена в вершине конуса. Внутри конуса располагается двуполостный гиперboloид (например для  $C < C_0$ ), а вне - однополостный (для  $C > C_0$ ), или наоборот. Вблизи особой точки типа центр располагаются эллипсоиды. Вид поверхностей в окрестности конических особых точек представлен на рис. 3.3 и 3.4.

Непрерывное изменение постоянной Якоби  $C$  вблизи конических точек приводит к преобразованию поверхностей, близких к однополостному гиперboloиду, в поверхности, близкие к двуполостному гиперboloиду, посредством прохождения через общий предельный конус. Возможен и обратный процесс.

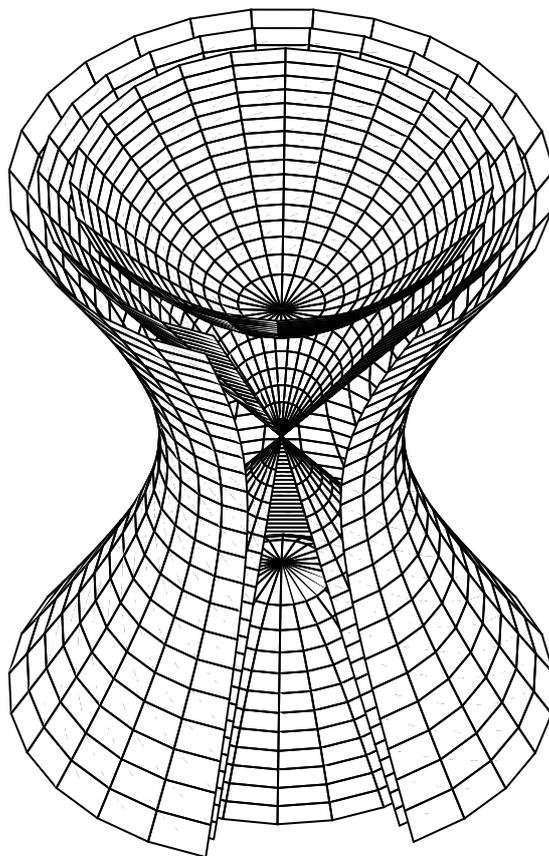


Рис. 3.3. Поверхности нулевой скорости вблизи особой точки типа "конус". Для наглядности сделан разрез поверхностей двумя меридиональными плоскостями.

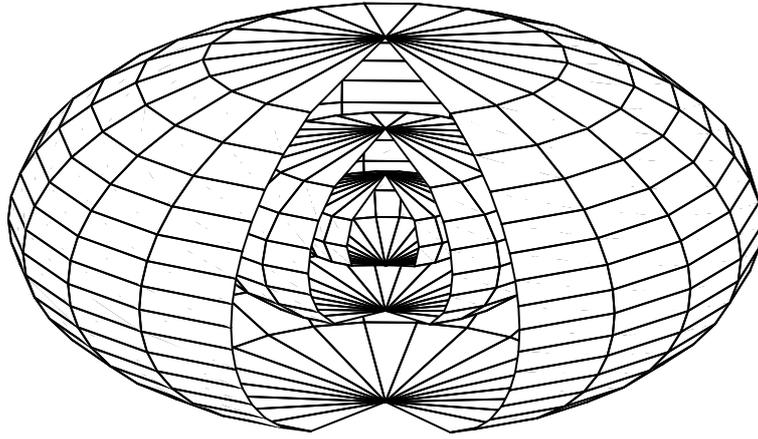


Рис. 3.4. Поверхности нулевой скорости вблизи особой точки типа "центр".

В случае особых точек типа центр аналогичное изменение  $C$  приводит к стягиванию в эту особую точку поверхностей, близких к эллипсоиду, и последующему их исчезновению. Противоположное изменение  $C$  при прохождении особой точки приводит, наоборот, к возникновению поверхностей эллипсоидального типа.

Приведение квадратичной формы в разложении (3.26) к каноническому виду показывает, что прямолинейные точки  $L_1, L_2, L_3$  являются коническими точками с осью конуса, совпадающей с осью абсцисс  $Gx$ . А треугольные точки  $L_4, L_5$  оказываются также коническими точками, но с осью конуса параллельной оси  $Gz$ .

Бесконечно удаленные точки  $L_{\pm\infty}$  являются несобственными точками. Их условно можно отнести к особым точкам типа центр. Этим точкам соответствует значение постоянной Якоби  $C_{\pm\infty} = 0$ . При  $C \rightarrow 0$  поверхности Хилла стягиваются к этим точкам, а при  $C < 0$  перестают существовать.

Кроме того, к особым точкам поверхностей нулевой скорости следует отнести также основные тела-точки  $M_1$  и  $M_2$ . В этих точках функция  $F$  и все ее частные производные обращаются в бесконечность. Это особые точки типа "полюс".

Поверхности вблизи этих точек имеют вид, близкий к концентрическим сферам, которые при  $C \rightarrow \infty$  стягиваются к самим точкам.

Кроме изолированных особых точек поверхности Хилла имеют особую бесконечно удаленную (несобственную) цилиндрическую поверхность  $Z$  - прямой круговой конус  $x^2 + y^2 = C$  бесконечного радиуса  $C = \infty$  с осью цилиндра, совпадающей с осью аппликата  $Gz$ . При  $C \rightarrow \infty$  поверхности Хилла на больших удалениях стягиваются к такому особому цилиндру  $Z$ .

Таким образом, поверхности Хилла имеют девять изолированных особых точек  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_\infty, L_{-\infty}, M_1, M_2$  и одну особую поверхность  $Z$ .

Для построения всего семейства поверхностей (3.21) рассмотрим непрерывное уменьшение величины постоянной Якоби  $C$  от  $\infty$  до 0.

При  $C = \infty$  поверхности Хилла вырождаются в точки  $M_1, M_2$  и в указанный особый бесконечно удаленный цилиндр  $Z$ .

Для очень больших, но конечных значений  $C$ , из (3.21) получаются поверхности, близкие к сферическим, в окрестности особых точек  $M_1$  и  $M_2$  и в "окрестности" особого цилиндра  $Z$  - поверхности, близкие к прямому круговому цилиндру с осью  $Gz$ :

$$\begin{aligned} \frac{1-\mu}{r_1} &= C + \varepsilon_2, & \text{- квазисфера вокруг } M_1, \\ \frac{\mu}{r_2} &= C + \varepsilon_3, & \text{- квазисфера вокруг } M_2, \\ x^2 + y^2 &= C + \varepsilon_1, & \text{- квазицилиндр, близкий к } Z, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - малые величины.

Отсюда легко установить области возможности движения для больших значений  $C$  (т. е. для малых значений относительной энергии тела малой массы): либо внутри сферы с центром в  $M_1$ , либо внутри сферы меньшего (при  $\mu < 1/2$ ) радиуса с центром в  $M_2$ , либо вне бесконечного прямого кругового цилиндра.

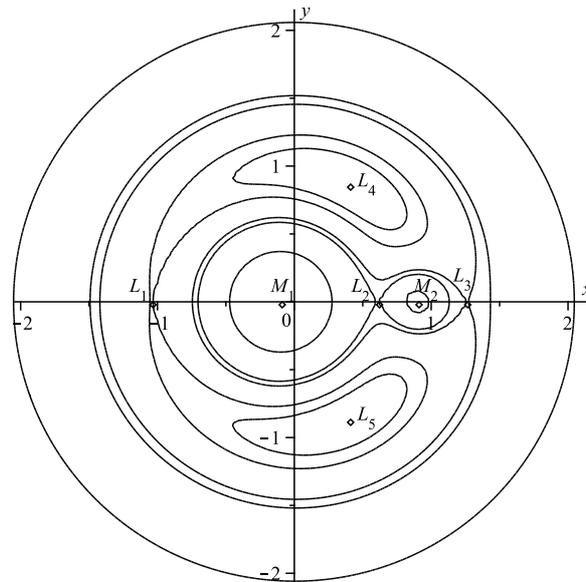


Рис. 3.5. Сечение поверхностей нулевой скорости плоскостью  $xy$ .

Если малое тело в начальный момент времени находится внутри одной из этих областей и обладает такой скоростью, что постоянная Якоби  $C$  не меньше рассматриваемого значения, то такое тело останется в этой области "навечно". Такие движения называют *устойчивыми по Хиллу* в честь их первого исследователя Дж.Хилла. Устойчивость по Хиллу строго гарантирует существование спутникового типа движения малого тела вблизи одного из основных тел. Критерием, гарантирующим устойчивость по Хиллу, является выполнение неравенства  $C > C_2$ .

За последующими изменениями поверхностей нулевой скорости удобно следить, если область недоступности представлять в виде ствола гигантского разрушающегося дерева. Разрушенная часть определяет область возможности движения, а неразрушенная (тело дерева) - область недоступности. При  $C = \infty$  область недоступности заполняет все пространство. Разрушение дерева начинается из трех очагов - поверхности

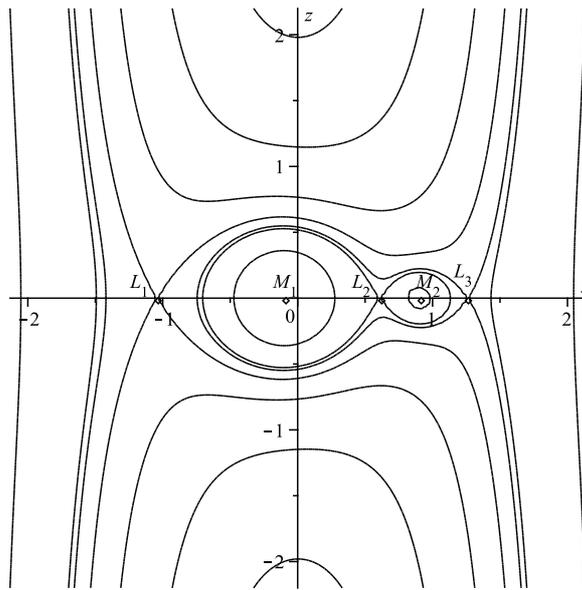


Рис. 3.6. Сечение поверхностей нулевой скорости плоскостью  $xz$ .

особого цилиндра  $Z$ , и особых точек  $M_1$  и  $M_2$ . В дальнейшем разрушение происходит в каждой точке соответствующей поверхности Хилла, но с разными скоростями рспада.

За изменением поверхностей Хилла, связанным с изменением  $C$ , можно следить по рис. 3.5 и 3.6, на которых изображены сечения поверхностей Хилла координатными плоскостями  $xu$  и  $xz$ .

Сначала уменьшение значения  $C$  приводит к изменению размеров и деформации цилиндра и сфер, но топологический характер поверхностей Хилла не изменяется до тех пор, пока величина  $C$  не достигнет значения  $C_2$ . Это значение  $C$  характеризуется тем, что квазисферы вокруг основных тел, вытягиваясь в направлении друг к другу, пересекаются в одной общей точке - это особая точка  $L_2$ . А последующее уменьшение  $C$  приводит к тому, что поверхность нулевой скорости принимает вид "гантели". Два "очага разрушения" вокруг каждого из основных тел образуют один - указанная

”гантель”. Если в начальный момент времени малое тело находится внутри этой гантели и постоянная  $C$  по величине не меньше рассматриваемой, то малое тело останется внутри гантели навсегда, т.е. станет общим спутником обоих основных тел. Такие движения также являются устойчивыми по Хиллу. Условием гарантирующим такую устойчивость является неравенство  $C > C_3$ .

Дальнейшее уменьшение  $C$  ведет к появлению на оси  $Gx$  общей точки у поверхности ”квазицилиндра” и гантели - это точка  $L_3$ . А при  $C < C_3$  у ”ствола” образуется ”дупло”. Сечение поверхности Хилла плоскостью  $Gxy$  в этом случае имеет вид подковы.

При достижении величиной  $C$  значения  $C_1$  дупло и внешняя поверхность дерева пересекаются в общей особой точке  $L_1$  и при последующем уменьшении  $C$  у разрушающегося дерева вдоль оси  $x$  образуется сквозной проход. Сечение поверхности Хилла плоскостью  $Gxy$  в этом случае принимает вид двух ”головастиков”, внутри которых находятся области недоступности для тела малой массы.

С дальнейшим уменьшением  $C$  размеры головастиков уменьшаются, и при  $C = C_4 = C_5$  они стягиваются в особые точки  $L_4$  и  $L_5$ . При  $C < C_4$  разрушающийся ствол расщепляется на два ”пенька” бесконечной длины (их называют также ”занавесями”), и поверхности нулевой скорости перестают пересекаться с плоскостью  $Gxy$ .

Последующее уменьшение  $C$  до  $C = 0$  ведет к полному разрушению пеньков, а поверхности нулевой скорости при  $C \rightarrow 0$  стягиваются в бесконечно удаленные особые точки  $L_{\pm\infty}$ . Область недоступности перестает существовать. Энергия тела малой массы достигает значений, позволяющих ему попасть (при соответствующих начальных условиях) в любую точку пространства.

### 3.2.5 Использование относительной системы координат

Иногда удобнее уравнения ограниченной круговой задачи записывать в относительной системе координат с началом в точке  $M_1$ . Для перехода от барицентрической вращающейся системы  $Gxyz$  к относительной  $M_1\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , вращающейся с той же постоянной угловой скоростью  $n$ , осуществим перенос начала (сдвиг вдоль оси абсцисс  $x$ ) с помощью формул преобразования:

$$x - x_1 = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}. \quad (3.28)$$

Тогда уравнения (3.5) и (3.9) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2n\dot{\tilde{y}} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{x}} = n^2(\tilde{x} + x_1) + \frac{\partial U}{\partial\tilde{x}}, \\ \ddot{\tilde{y}} + 2n\dot{\tilde{x}} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{y}} = n^2\tilde{y} + \frac{\partial U}{\partial\tilde{y}}, \\ \ddot{\tilde{z}} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{z}} = \frac{\partial U}{\partial\tilde{z}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} - \mu - \frac{1-\mu}{r_1^3}\tilde{x} - \frac{\mu}{r_2^3}(\tilde{x} - 1), \\ \ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} &= \tilde{y} \left( 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right), \\ \ddot{\tilde{z}} &= -\tilde{z} \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где

$$r_1 = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\tilde{x} - 1)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}, \quad (3.31)$$

а массовый параметр  $\mu$  считается изменяющимся в диапазоне  $0 < \mu < 1$ .

Эти уравнения по сравнению с уравнениями в барицентрической системе координат  $Gxyz$  имеют преимущество, заключающееся в том, что взаимные расстояния не зависят от

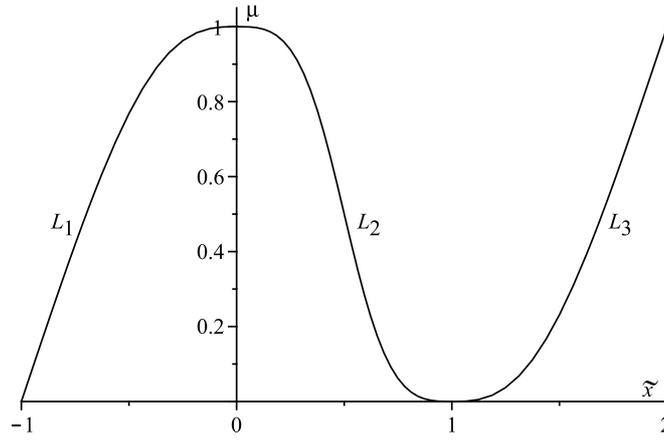


Рис. 3.7. Зависимость массового параметра  $\mu$  от абсциссы  $\tilde{x}$  прямолинейной точки либрации.

величины массового параметра  $\mu$ . Интеграл Якоби сохраняет прежний вид (3.7), а функция  $\Omega$  преобразуется к виду

$$\Omega = \frac{(\tilde{x} - \mu)^2 + \tilde{y}^2}{2} + U. \quad (3.32)$$

Координаты точек либрации  $L_4$ ,  $L_5$  и  $L_{\pm\infty}$  в относительной системе  $M_1\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  будут таковы, что

$$L_4 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad L_5 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad L_{\pm\infty} = (\mu, 0, \pm\infty), \quad (3.33)$$

а для определения координат прямолинейных точек либрации  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  получается уравнение

$$\tilde{x} - \mu - \frac{1 - \mu}{r_1^3} \tilde{x} - \frac{\mu}{r_2^3} (\tilde{x} - 1) = 0. \quad (3.34)$$

Так как в формулах (3.31) расстояния  $r_1$  и  $r_2$  не зависят от  $\mu$ , то уравнение (3.34) можно разрешить относительно  $\mu$

и записать

$$\mu = \frac{\tilde{x} - \frac{\tilde{x}}{r_1^3}}{1 - \frac{\tilde{x}}{r_1^3} + \frac{\tilde{x} - 1}{r_2^3}}. \quad (3.35)$$

Столь простую зависимость не удастся получить для барицентрической системы координат  $Gxyz$ . В этом смысле введение относительной системы координат дает определенные преимущества. И хотя координаты прямолинейных точек либрации в виде известных функций от  $\mu$  не удастся получить и здесь, но удастся получить обратную однозначную зависимость нормированной массы  $\mu$  как функции от координаты прямолинейной точки либрации  $L_i$ . Эта зависимость приведена на рис. 3.7.

Если воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} r_1 = -\tilde{x}, \quad r_2 = 1 - \tilde{x}, \quad \text{для } L_1, \quad \text{т.е. при } -1 < \tilde{x} < 0, \\ r_1 = \tilde{x}, \quad r_2 = 1 - \tilde{x}, \quad \text{для } L_2, \quad \text{т.е. при } 0 < \tilde{x} < 1, \\ r_1 = \tilde{x}, \quad r_2 = -1 + \tilde{x}, \quad \text{для } L_3, \quad \text{т.е. при } 1 < \tilde{x} < 2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

то из (3.35) для определения координат прямолинейных точек либрации по заданному значению массового параметра  $\mu$  можно получить уравнения пятой степени

$$\begin{aligned} \tilde{x}^5 - (2 + \mu)\tilde{x}^4 + (1 + 2\mu)\tilde{x}^3 + (1 - \mu)\tilde{x}^2 - 2(1 - \mu)\tilde{x} + \\ + (1 - \mu) = 0, \quad L_1 \\ \tilde{x}^5 - (2 + \mu)\tilde{x}^4 + (1 + 2\mu)\tilde{x}^3 - (1 - \mu)\tilde{x}^2 + 2(1 - \mu)\tilde{x} - \\ - (1 - \mu) = 0, \quad L_2 \\ \tilde{x}^5 - (2 + \mu)\tilde{x}^4 + (1 + 2\mu)\tilde{x}^3 - (1 + \mu)\tilde{x}^2 + 2(1 - \mu)\tilde{x} - \\ - (1 - \mu) = 0. \quad L_3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Поверхности нулевой скорости в относительной системе координат  $M_1\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  имеют тот же вид, но с учетом переноса начала координат в тело  $M_1$ .

### 3.2.6 О симметрии задачи

Уравнения движения ограниченной задачи трех тел допускают существование следующих симметричных решений:

$$\begin{array}{cccccc}
 x(t), & y(t), & z(t), & \dot{x}(t), & \dot{y}(t), & \dot{z}(t), \\
 & & & & \text{— исходное} & \text{решен.}, \\
 x(t), & y(t), & -z(t), & \dot{x}(t), & \dot{y}(t), & -\dot{z}(t), \\
 & & & & \text{— симм. отн.} & \text{пл. } xy, \\
 x(-t), & -y(-t), & z(-t), & -\dot{x}(-t), & \dot{y}(-t), & -\dot{z}(-t), \\
 & & & & \text{— симм. отн.} & \text{пл. } xz, \\
 x(-t), & -y(-t), & -z(-t), & -\dot{x}(-t), & \dot{y}(-t), & \dot{z}(-t), \\
 & & & & \text{— симм. отн.} & \text{оси } x,
 \end{array} \tag{3.38}$$

где аргумент  $(-t)$  означает движение тела в обратном направлении. Существование таких решений легко проверяется путем их подстановки в уравнения движения. Проверим, например, существование решения, симметричного исходному относительно плоскости  $xz$ . Для этого подставим это решение в уравнения движения (3.9). Учитывая значения вторых производных  $\ddot{x}(-t)$ ,  $-\ddot{y}(-t)$  и  $\ddot{z}(-t)$ , тогда из (3.9) получается:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(-t) - 2\dot{y}(-t) &= \frac{\partial \Omega}{\partial [x(-t)]}, \\
 -\ddot{y}(-t) - 2\dot{x}(-t) &= -\frac{\partial \Omega}{\partial [-y(-t)]}, \\
 \ddot{z}(-t) &= \frac{\partial \Omega}{\partial [z(-t)]}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Отсюда видно, что, как и исходное решение, симметричное решение удовлетворяет уравнениям движения.

Если, кроме того, относительная масса имеет значение  $\mu = 1/2$ , то появляется еще симметрия относительно плос-

кости  $yz$

$$\begin{array}{ll} x(t), & y(t), & z(t), & \dot{x}(t), & \dot{y}(t), & \dot{z}(t), & \text{— исходное реш.}, \\ -x(t), & y(t), & z(t), & -\dot{x}(t), & \dot{y}(t), & -\dot{z}(t), & \text{— симметричное} \\ & & & & & & \text{отн. пл. } yz. \end{array} \quad (3.40)$$

Если траектория пересекает ось симметрии под прямым углом, то решение становится симметричным самому себе. Свойство симметрии решений широко используются при отыскании периодических траекторий, пересекающих плоскость  $xz$  под прямым углом.

### 3.3 Ограниченная эллиптическая задача трех тел

Изучение эллиптической ограниченной задачи трех тел началось значительно позднее круговой. Впервые уравнения движения малого тела в ограниченной эллиптической задаче во вращающейся и пульсирующей системе координат получил Шайбнер в 1866 году. Более полувека спустя, в 1918 году, была опубликована работа Петра и Нехвила, в которой выведены уравнения той же задачи, но для плоского движения. Использование пульсирующих координат в этой работе предложено Петром, а введение истинной аномалии основных тел в качестве независимой переменной — Нехвиллом. В дальнейшем Нехвил сделал попытку обобщения этих уравнений на трехмерный случай, но при выводе допустил ошибку, которую в 1940 году исправила Наталья Федоровна Рейн (доцент Московского университета).

Поэтому называть уравнения движения эллиптической задачи именем Нехвила (как это обычно делают) недостаточно обоснованно. Их имеет смысл называть уравнениями движения Шайбнер'а (по первым буквам всех вышеупомянутых авторов).

### 3.3.1 Уравнения движения

Введем инерциальную прямоугольную систему координат  $G\xi\eta\zeta$  так, чтобы плоскость  $G\xi\eta$  совпала с плоскостью движения основных (активно гравитирующих) тел  $M_1$  и  $M_2$ . В такой системе координат уравнения движения малого тела имеют простой вид

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad \text{где} \quad U = f \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right). \quad (3.41)$$

Траектория тела  $M_2$  относительно  $M_1$  определяется уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (3.42)$$

где  $p$  - фокальный параметр орбиты,  $e$  - эксцентриситет,  $v$  - истинная аномалия.

Перейдем к вращающейся системе координат  $G\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$  по формулам

$$\xi = \tilde{\xi} \cos v - \tilde{\eta} \sin v, \quad \eta = \tilde{\xi} \sin v + \tilde{\eta} \cos v, \quad \zeta = \tilde{\zeta}. \quad (3.43)$$

Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\xi}} - 2\dot{v}\dot{\tilde{\eta}} - \dot{v}^2\tilde{\xi} - \ddot{v}\tilde{\eta} &= \frac{\partial U}{\partial \tilde{\xi}}, \\ \ddot{\tilde{\eta}} + 2\dot{v}\dot{\tilde{\xi}} - \dot{v}^2\tilde{\eta} + \ddot{v}\tilde{\xi} &= \frac{\partial U}{\partial \tilde{\eta}}, \\ \ddot{\tilde{\zeta}} &= \frac{\partial U}{\partial \tilde{\zeta}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_1)^2 + \tilde{\eta}^2 + \tilde{\zeta}^2}, & r_2 &= \sqrt{(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_2)^2 + \tilde{\eta}^2 + \tilde{\zeta}^2}, \\ \tilde{\xi}_1 &= -\frac{m_1 r}{m_1 + m_2}, & \tilde{\xi}_2 &= \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Далее, следуя Петру, сделаем переход к пульсирующей системе координат  $Gxyz$  по формулам

$$\tilde{\xi} = \rho x, \quad \tilde{\eta} = \rho y, \quad \tilde{\zeta} = \rho z, \quad \text{где} \quad \rho = \frac{1}{1 + e \cos v}, \quad (3.46)$$

а, следуя Нехвилу, вместо времени  $t$  введем новую независимую переменную  $v$  - истинную аномалию тела  $M_2$ . Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} r^2 \dot{v} &= c = \sqrt{fp(m_1 + m_2)}, \quad r = \rho p, \\ \dot{\tilde{\xi}} &= (\rho'x + \rho x')\dot{v}, \quad \ddot{\tilde{\xi}} = (\rho''x + 2\rho'x' + \rho x'')\dot{v}^2 + (\rho'x + \rho x')\dot{v}\dot{v}', \end{aligned} \quad (3.47)$$

уравнения движения (3.44) приведем к окончательному виду

$$x'' - 2y' = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad y'' + 2x' = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad z'' = \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad (3.48)$$

где штрих означает дифференцирование по истинной аномалии  $v$ ,  $\Omega$  - аналог функции Якоби в круговой задаче,

$$\Omega = \rho \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - ez^2 \cos v) + p^3 \left( \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \right], \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}, \\ x_1 &= -p\mu, \quad x_2 = p(1 - \mu), \\ \mu &= m_2/(m_1 + m_2), \quad 1 - \mu = m_1/(m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Эти уравнения будем называть *уравнениями Шапнера*.

### 3.3.2 Точки либрации

Ограниченная эллиптическая задача допускает существование стационарных решений в координатах Шапнера  $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$ . Для их отыскания из уравне-

ний (3.48) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x - p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} (x + p\mu) - p^3 \frac{\mu}{r_2^3} (x + p\mu - p) &= 0, \\ y \left( 1 - p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} - p^3 \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0, \\ -z \left( e \cos v + p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} + p^3 \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Первые два уравнения в этой системе совпадают с аналогичными уравнениями в ограниченной круговой задаче, поэтому можно сразу утверждать, что ограниченная эллиптическая задача допускает существование прямолинейных  $L_1, L_2, L_3$  и треугольных  $L_4, L_5$  точек либрации. Координаты этих точек определяются так же, как и в круговой задаче.

Третье уравнение в системе (3.51) отличается от аналогичного уравнения в круговой задаче наличием слагаемого  $e \cos v$ , из-за чего перестают существовать бесконечно удаленные точки либрации.

Таким образом, в ограниченной эллиптической задаче трех тел существуют три прямолинейные и две треугольные точки либрации. Никаких других строгих частных решений уравнения движения не допускают.

### 3.3.3 О законе сохранения энергии

Попытка отыскания в ограниченной эллиптической задаче трех тел интеграла, аналогичного интегралу Якоби, не приводит к положительному результату, так как функция  $\Omega$  зависит явно от  $v$ . Действительно, умножая уравнения в системе (3.51) соответственно на  $x', y', z'$ , складывая и интегрируя по истинной аномалии основных тел  $v$  в пределах от  $v_0$  до  $v$ , получим

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_{v_0}^2}{2} = \int_{v_0}^v \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} x' + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega}{\partial z} z' \right) dv, \quad (3.52)$$

где  $V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  - "скорость" тела  $M$  в системе координат Шапнера,  $V_{v_0}^2 = (V^2)_{v=v_0}$ .

Выражение, стоящее под знаком интеграла, не является полным дифференциалом при  $e \neq 0$ . Поэтому уравнение (3.52) не будет первым интегралом. Его следует рассматривать как интегральное инвариантное соотношение.

Добавляя и вычитая из подынтегральной функции частную производную  $\partial\Omega/\partial v$ , выделяя полный дифференциал функции  $\Omega$  и интегрируя, из (3.52) получим другой вид интегрального инвариантного соотношения

$$\frac{V^2}{2} - \Omega = \frac{V_0^2}{2} - \Omega_0 - \int_{v_0}^v \frac{\partial\Omega}{\partial v} dv. \quad (3.53)$$

Вычисляя частную производную  $\partial\Omega/\partial v$  в явном виде

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + p^3 \left( \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \right] \quad (3.54)$$

и подставляя ее в (3.53), получим

$$\frac{V^2}{2} - \Omega = \frac{V_0^2}{2} - \Omega_0 - \int_{v_0}^v \frac{e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} W dv, \quad (3.55)$$

где обозначено

$$W = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + p^3 \left( \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right). \quad (3.56)$$

Если, кроме того, сделать замену переменной интегрирования, переходя от истинной аномалии  $v$  к величине  $\rho = 1/(1 + e \cos v) = r/p$ , численно равной безразмерному расстоянию между основными телами, то инвариантное соотношение (3.53) можно записать в виде

$$\frac{V^2}{2} - \Omega = \frac{V_0^2}{2} - \Omega_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} W d\rho. \quad (3.57)$$

Чтобы вычислить интеграл в правой части интегрального соотношения (3.57), необходимо знать явные зависимости координат  $x, y, z$  от истинной аномалии  $v$ . Если такие зависимости задать каким-либо частным решением уравнений движения (3.48), то соотношение (3.57) сводится к квадратуре, которая выполняется только вдоль траектории, соответствующей этому частному решению. Для другого частного решения получится квадратура с другой функциональной зависимостью.

Кроме того, если предположить, что известно общее решение уравнений движения (3.48) в виде явных функций времени и шести произвольных постоянных интегрирования, то, подставляя это решение в подынтегральную функцию и выполняя квадратуру, получим

$$\int_{v_0}^v \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv = u(v) - u(v_0), \quad (3.58)$$

где  $u(v)$  - вообще говоря, неизвестная первообразная функция, так как для ее определения требуется знание общего решения исходных уравнений. Используя (3.58), квазиинтеграл (3.53) представим в виде

$$\frac{V^2}{2} - \Omega + u(v) = h, \quad (3.59)$$

где  $h = V_0^2/2 - \Omega_0 + u(v_0)$ .

Два первых слагаемых в левой части этого уравнения имеют вид, аналогичный левой части интеграла Якоби в круговой задаче. Их сумму иногда называют *энергией тела*  $M$ , хотя с точки зрения механики они таковыми не являются. Общепринятого названия для этой суммы не существует. Третий член  $u(v)$  определяет *дополнительную энергию* тела  $M$ , отдаваемую или получаемую им от переменного гравитационного поля основных тел при их движении по эллиптическим орбитам. Правая часть  $h$  уравнения (3.59) по форме аналогична левой, но вычисляется для начального значения  $v = v_0$ .

Уравнение (3.59) в ограниченной эллиптической задаче представляет собой "закон сохранения энергии" тела  $M$ , который можно сформулировать в следующем виде.

Полная энергия тела  $M$ , состоящая из якобиевой  $V^2/2 - \Omega$  и дополнительной энергии  $u(v)$ , есть величина постоянная, которая зависит не только от начального значения "якобиевой энергии", но и от выбираемой траектории (т.е. от шести независимых произвольных постоянных). На каждой траектории выполняется свой закон сохранения энергии. Величину  $h$  можно рассматривать как постоянную энергии, имеющую свое конкретное значение на каждой траектории.

При  $e = 0$  соотношение (3.59) превращается в интеграл Якоби. Но уравнение (3.59) нельзя считать первым интегралом уравнений движения, так как первообразная функция  $u(v)$  не известна.

Из условия периодичности  $\rho(v+2\pi) = \rho(v)$  и соотношения

$$\int_{v_0}^v \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv = \int_{\rho_0}^{\rho} W d\rho = u(v) - u(v_0) \quad (3.60)$$

следует, что  $u(v)$  - есть  $2\pi$ -периодическая функция истинной аномалии:  $u(v + 2\pi) = u(v)$ . Действительно:

$$\begin{aligned} u(v + 2\pi) - u(v_0) &= \int_{v_0}^{v+2\pi} \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv = \int_{\rho_0}^{\rho(v+2\pi)} W d\rho = \\ &= \int_{\rho_0}^{\rho(v)} W d\rho = \int_{v_0}^v \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv = u(v) - u(v_0). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Из (3.56) видно, что функция  $W$  всегда положительна, поэтому первообразная  $u(v)$  монотонно возрастает при движении основных тел от перицентра к апоцентру, и тело  $M$  получает дополнительную энергию в гравитационном поле

основных тел. При движении от апоцентра к перицентру дополнительная энергия убывает, а тело  $M$  отдает энергию основным телам. Поэтому для  $\pi \geq v \geq 0$  выполняются неравенства

$$u(\pi) \geq u(v) \geq u(0). \quad (3.62)$$

В апоцентре и перицентре орбит основных тел  $u(v)$  достигает своего максимального и минимального значений соответственно.

Из (3.59) и (3.62) видно, что в ограниченной эллиптической задаче трех тел якобиева энергия  $V^2/2 - \Omega$  также является периодической функцией с периодом  $2\pi$ . Она достигает максимального и минимального значений соответственно в перицентре и апоцентре орбит основных тел, так что всегда выполняются неравенства

$$\frac{V_a^2}{2} - \Omega_a \leq \frac{V^2}{2} - \Omega \leq \frac{V_p^2}{2} - \Omega_p, \quad (3.63)$$

где нижний индекс  $p$  соответствует перицентру,  $a$  - апоцентру орбит основных тел.

Функция  $W$  непрерывна в любой замкнутой области и ограничена снизу  $W > 0$ , поэтому существует минимум этой функции. Необходимые условия существования экстремума функции  $W$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= x - p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} (x + p\mu) - p \frac{\mu}{r_2^3} (x + p\mu - p) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= y \left[ 1 - p^3 \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= z \left[ 1 - p^3 \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Эти условия удовлетворяются на окружности  $x = p(1 - 2\mu)/2$ ,  $y^2 + z^2 = 3p^2/4$ , поэтому минимальное значение  $W_{\min}$  функции  $W$  равно:

$$W_{\min} = p^2 \frac{3 - \mu(1 - \mu)}{2}. \quad (3.65)$$

Если ввести функции

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= W - W_{\min} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + p^3 \left( \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - p^2 \frac{1 - \mu(1 - \mu)}{2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

и

$$\tilde{u}(v) = u(v) - \frac{W_{\min}}{1 + e \cos v}, \quad (3.67)$$

то закон сохранения энергии (3.59) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{V_a^2}{2} - \Omega_a + \frac{W_{\min}}{1 - e} + \tilde{u}(\pi) &= \frac{V^2}{2} - \Omega + \frac{W_{\min}}{1 + e \cos v} + \tilde{u}(v) = \\ &= \frac{V_p^2}{2} - \Omega_p + \frac{W_{\min}}{1 + e} + \tilde{u}(0) = h. \end{aligned} \quad (3.68)$$

### 3.3.4 Поверхности минимальной энергии

Полагая  $\rho_0 = 1/(1 + e)$  и учитывая, что  $\widetilde{W} \geq 0$ , можно записать

$$\int_{1/(1-e)}^{1/(1+e)} \widetilde{W} d\rho \leq \int_{1/(1-e)}^{\rho} \widetilde{W} d\rho \leq \int_{1/(1-e)}^{1/(1-e)} \widetilde{W} d\rho = 0, \quad (3.69)$$

откуда для функции  $\tilde{u}(v)$  получаются неравенства

$$\tilde{u}(\pi) \geq \tilde{u}(v) \geq \tilde{u}(0) = 0. \quad (3.70)$$

Используя равенство (3.67), перепишем квазиинтеграл энергии (3.59) в виде

$$\begin{aligned} \frac{V_a^2}{2} - \Omega_a + \frac{W_{\min}}{1 - e} + \tilde{u}(\pi) &= \frac{V^2}{2} - \Omega + \frac{W_{\min}}{1 + e \cos v} + \tilde{u}(v) = \\ &= \frac{V_p^2}{2} - \Omega_p + \frac{W_{\min}}{1 + e} + \tilde{u}(0). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Учитывая условия (3.70), отсюда получаются более сильные неравенства, чем (3.63):

$$\frac{V_a^2}{2} - \Omega_a + \frac{W_{\min}}{1-e} \leq \frac{V^2}{2} - \Omega + \frac{W_{\min}}{1+e \cos v} \leq \frac{V_p^2}{2} - \Omega_p + \frac{W_{\min}}{1+e}. \quad (3.72)$$

Если использовать неравенство  $V^2 \geq 0$ , справедливое для любых действительных движений, то из (3.59) получим область возможности движения в виде

$$u - \Omega \leq h. \quad (3.73)$$

Если, кроме того, воспользоваться неравенствами (3.70), то область возможности движения получим в виде

$$\Omega - \frac{W_{\min}}{1+e \cos v} \geq \Omega_p - \frac{V_p^2}{2} - \frac{W_{\min}}{1+e}. \quad (3.74)$$

Границу этой области будем называть *поверхностью минимальной энергии*. Ее уравнение запишется в виде

$$F = x^2 + y^2 - ez^2 \cos v + 2p^3 \left( \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - 2W_{\min} = C(1+e \cos v), \quad (3.75)$$

где  $C = C_p - 2W_{\min}/(1+e)$ ,  $C_p = 2\Omega_p - V_p^2$ .

Семейство поверхностей минимальной энергии зависит от пяти параметров:  $p$ ,  $\mu$ ,  $e$ ,  $C$  и  $v$ . Величина  $C$  определяет энергию тела  $M$ . Фокальный параметр  $p$  фактически определяет линейный масштаб поверхностей. Поэтому, не ограничивая общности, можно принять его равным единице, а семейство поверхностей считать зависящим от четырех параметров.

При заданных значениях параметров  $p$ ,  $e$ ,  $\mu$ ,  $C$  и  $v$  тело  $M$  не может выйти за пределы поверхности (3.75). При  $W_{\min} = 0$ , поверхности минимальной энергии переходят в поверхности нулевой скорости и нулевой дополнительной энергии, а при  $e = 0$  (а также при  $\cos v = 0$  и  $e \neq 0$ ) преобразуются в поверхности нулевой скорости ограниченной круговой задачи трех тел.

### 3.3.5 Особые точки поверхности минимальной энергии

Алгебраические уравнения для определения особых точек семейства поверхностей (3.75) такие же, как и для определения точек либрации:

$$\begin{aligned} x - p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} (x+p\mu) - p^3 \frac{\mu}{r_2^3} (x+p\mu-p) &= 0, \\ y \left( 1 - p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} - p^3 \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0, \\ -z \left( e \cos v + p^3 \frac{1-\mu}{r_1^3} + p^3 \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Поэтому особыми точками поверхностей (3.75) будут точки либрации  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4, L_5$ .

Других точек либрации не существует, но существуют другие особые точки. Несмотря на то, что точки либрации и особые точки определяются из одних и тех же уравнений, общее число таких точек различно. Несовпадение числа точек либрации и особых точек объясняется тем, что поверхности минимальной энергии строятся отдельно для каждого значения истинной аномалии  $v$ , т.е. величина  $v$  в уравнениях (3.76) при определении координат особых точек считается постоянной. А при определении частных стационарных решений уравнений движения (точек либрации) истинная аномалия является переменной величиной.

Поэтому особыми точками будут не только точки либрации, но также и решения уравнений (3.76) при  $z \neq 0$  и  $v = \text{const}$ . Для их отыскания соотношение  $p^3(1-\mu)/r_1^3 + p^3\mu/r_2^3 = -e \cos v$ , полученное из третьего уравнения системы (3.76), подставим во второе, которое запишется в виде  $y(1 + e \cos v) = 0$ , откуда получим  $y = 0$ . Это означает, что искомые точки располагаются в плоскости  $xz$  и для их

определения получается система двух уравнений

$$\begin{aligned} x(1 + e \cos v) - p^4 \mu (1 - \mu) \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) &= 0, \\ e \cos v + p^3 \frac{1 - \mu}{r_1^3} + p^3 \frac{\mu}{r_2^3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Из второго уравнения этой системы видно, что при  $\cos v > 0$  действительных решений не существует. Такие решения могут существовать только при  $\cos v \leq 0$ . Так как  $z$  входит в уравнения (3.77) только под знаком квадрата, то эти решения должны существовать симметричными относительно оси  $x$  парами. Такие решения будем называть *компланарными особыми точками*, и обозначать  $\tilde{L}_6 = (x_6, 0, z_6)$  и  $\tilde{L}_7 = (x_7, 0, z_7)$ , где  $x_7 = x_6$ ,  $z_7 = -z_6$ . При  $v = \pi/2$  компланарными особыми точками будут бесконечно удаленные точки либрации  $L_{\pm\infty} = (0, 0, \pm\infty)$ , известные для круговой задачи. Уравнения (3.77) имеют также очевидное треугольное решение  $r_1 = r_2 = 1$  при  $\cos v = -1$  и  $e = 1$ . При  $e \rightarrow 0$  компланарные особые точки стремятся к бесконечно удаленным точкам либрации. В остальных случаях координаты компланарных особых точек можно определить только численно, что представлено на рис. 3.8.

Особыми точками поверхностей минимальной энергии являются также точки  $M_1$  и  $M_2$ , в которых располагаются основные тела.

### 3.3.6 Построение поверхностей минимальной энергии

Основным параметром семейства поверхностей (3.75) является постоянная Якоби  $C$ . Но для фиксированных значений  $C$ ,  $e$  и  $\mu$  равенство (3.75), в свою очередь, определяет еще одно семейство поверхностей с параметром  $v$ . То есть, в то время как для круговой задачи при постоянных значениях  $C$  и  $\mu$  существует единственная поверхность нулевой скорости, для эллиптической задачи при постоянных значениях  $C$ ,  $e$  и  $\mu$  существует целое семейство поверхностей

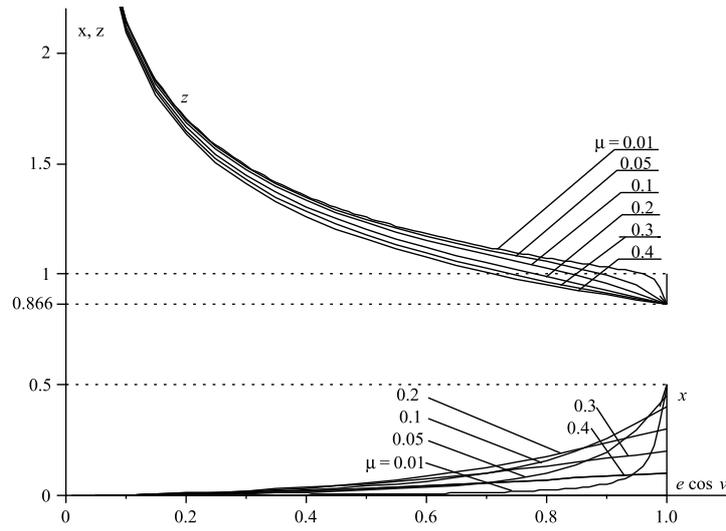


Рис. 3.8. Координаты компланарных особых точек  $L_6$ . Если изменить знак  $z$  на отрицательный, то получим координаты особых точек  $L_7$ .

минимальной энергии. Поверхности этого семейства с увеличением  $v$  от 0 до  $\pi$  непрерывно меняются (см. рис. 3.9 и 3.10), заполняя пространство между двух поверхностями, соответствующих двум значениям истинной аномалии  $v = 0$  и  $v = \pi$ :

$$F_0 = x^2 + y^2 - ez^2 + 2p^3 \left( \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - 2W_{\min} = C(1+e),$$

для  $v = 0$ ,

(3.78)

$$F_\pi = x^2 + y^2 + ez^2 + 2p^3 \left( \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - 2W_{\min} = C(1-e),$$

для  $v = \pi$ .

(3.79)

При дальнейшем увеличении  $v$  от  $v = \pi$  до  $v = 2\pi$  форма поверхностей изменяется в обратном направлении. А при  $v \rightarrow \infty$  поверхности минимальной энергии (3.75) представля-

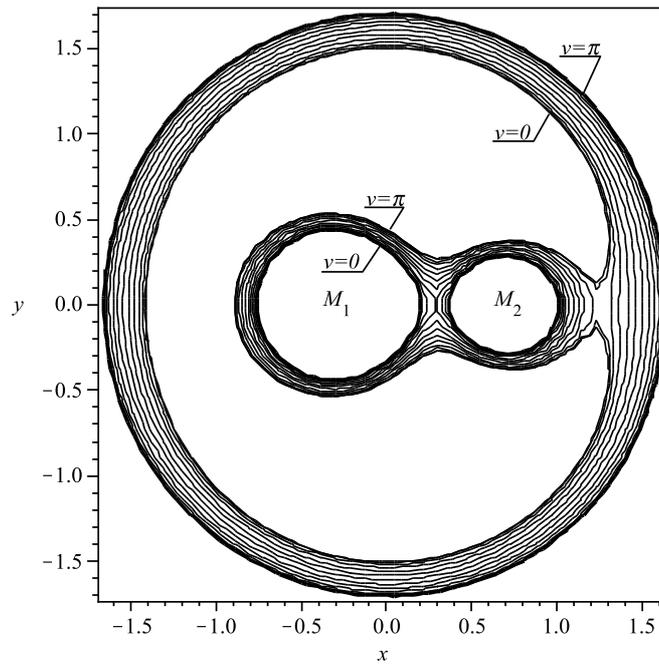


Рис. 3.9. Сечение плоскостью  $xy$  семейства поверхностей минимальной энергии для  $\mu = 0.3$ ,  $e = 0.25$  и  $C = 1$ . Все семейство изображено поверхностями для значений истинной аномалии  $v$  от  $v = 0$  до  $v = \pi$  с шагом  $15^\circ$ .

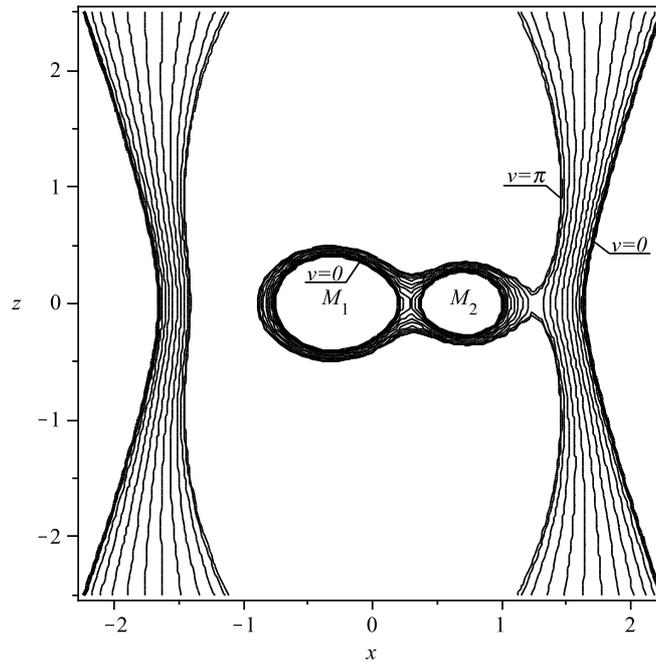


Рис. 3.10. Сечение плоскостью  $xz$  семейства поверхностей минимальной энергии для  $\mu = 0.3$ ,  $e = 0.25$  и  $C = 1$ .

ют собой пульсирующие поверхности, заключенные между двух поверхностей (3.78) и (3.79). Период пульсации совпадает с периодом обращения основных тел.

Пространство между поверхностями  $F_0$  и  $F_\pi$  увеличивается с увеличением эксцентриситета  $e$ , а при  $e \rightarrow 0$ , наоборот, стягивается к соответствующей поверхности нулевой скорости.

Для плоской задачи, т. е. при  $z = 0$ , уравнения кривых минимальной энергии полностью совпадают с аналогичными уравнениями кривых нулевой скорости круговой задачи, вычисленными для соответствующих значений  $C$ . Поэтому сечения поверхностей минимальной энергии плоскостью  $z = 0$  будут точно совпадать с соответствующим образом выбранными сечениями поверхностей нулевой скорости.

Сечения поверхностей минимальной энергии плоскостью  $y = 0$  отличаются от аналогичных сечений поверхностей нулевой скорости, причем отличия тем сильнее, чем большие значения принимает  $z$ .

На очень больших удалениях от начала координат при очень больших  $C$  уравнение (3.75) можно записать в виде

$$x^2 + y^2 - ez^2 \cos v + \varepsilon = C(1 + e \cos v) + 2W_{min}, \quad (3.80)$$

где  $\varepsilon$  — малая величина. Отсюда видно, что на больших удалениях эта поверхность с изменением  $v$  преобразуется от вытянутого эллипсоида вращения (при  $\cos v > 0$ ) до однополостного гиперboloида с осью  $z$  (при  $\cos v < 0$ ), принимая (при  $\cos v = 0$ ) вид бесконечно большого кругового цилиндра с осью  $z$ .

Проследим за изменением поверхностей минимальной энергии в процессе монотонного уменьшения постоянной  $C$ , начиная с бесконечно больших значений. Для очень больших значений  $C$  поверхности минимальной энергии пульсируют либо между эллипсоидом (3.79) и однополостным гиперboloидом (3.78), либо между двух поверхностей, близких к сферам, вокруг тела  $M_1$

$$2(1 - \mu)/r_1 + \varepsilon = C(2 + e), \quad 2(1 - \mu)/r_1 + \varepsilon = C(1 - e) \quad (3.81)$$

или вокруг тела  $M_2$

$$2\mu/r_2 + \varepsilon = C(1 + e), \quad 2\mu/r_2 + \varepsilon = C(1 - e). \quad (3.82)$$

Размеры этих поверхностей таковы, что эллипсоид всегда расположен внутри гиперboloида, а сферы, соответствующие значениям  $v=0$ , наоборот, лежат внутри сфер для  $v=\pi$ . Для других значений  $v \in (0, \pi)$  получим некоторые промежуточные поверхности. В зависимости от начального положения тела  $M$  области возможности движений находятся либо внутри указанных пульсирующих сфер (спутниковый тип движения), либо вне поверхности, пульсирующей между эллипсоидом и гиперboloидом.

С уменьшением  $C$  размеры сфер увеличиваются, а эллипсоида и гиперboloида уменьшаются. Вид областей искажается, но качественная картина сохраняется до пересечения поверхностей в точке  $L_2$  при

$$C = (C_2 - 2W_{\min})/(1 - e). \quad (3.83)$$

Дальнейшее уменьшение  $C$  приводит к появлению областей типа "гантели", охватывающих оба основных тела. Они появляются сначала для истинной аномалии вблизи апоцентра орбиты основных тел. При последующем уменьшении  $C$  области охватывают все большие значения истинной аномалии.

Характер движений при дальнейшем уменьшении  $C$  сильно зависит от эксцентриситета орбит основных тел. Если эксцентриситет мал, то видоизменения поверхностей минимальной энергии качественно повторяют известные для круговой задачи изменения поверхностей нулевой скорости. Но поверхности минимальной энергии для  $v=\pi$  и для  $v=0$  могут располагаться в областях либо одинаковых, либо различных (смежных) топологических типов. Так при  $C(1 - e) < C_2 - 2W_{\min} < C(1 + e)$  поверхности минимальной энергии представляют собой пульсирующие поверхности, которые для значений истинной аномалии основных тел в окрестности перицентра располагаются в области спутникового ти-

па движения, а в окрестности апоцентра в области типа "гантели".

При последующем уменьшении  $C$ , когда  $C_3 - 2W_{\min} < C(1 - e) < C(1 + e) < C_2 - 2W_{\min}$ , все пульсирующие поверхности оказываются внутри "гантели". Для  $C(1 - e) < C_3 - 2W_{\min} < C(1 + e)$  движения тела малой массы в окрестности основных тел при расположении их вблизи апоцентра становятся неограниченными. Но вблизи перицентра движения остаются ограниченными. При условии  $C(1 - e) < C_1 - 2W_{\min} < C(1 + e)$  сечение пульсирующей поверхности плоскостью  $xy$  изменяется от типа "подковы" (вблизи перицентра) до типа "головастика" (вблизи апоцентра). А при условии  $C(1 - e) < C_{4,5} - 2W_{\min} < C(1 + e)$  изменение поверхностей происходит соответственно от упомянутого типа "головастика" до "занавесей", не пересекающих плоскость  $xy$ . При этом для отрицательных значений  $\cos v$  вместо бесконечных "занавесей" появляются некоторые овалы, которые с уменьшением  $C$  стягиваются к особым точкам  $L_{6,7}$ . При  $C(1 - e) < C_{6,7} - 2W_{\min} < C(1 + e)$  движения вблизи апоцентра ничем не ограничены. При  $C(1 - e) < C_{6,7} - 2W_{\min}$  и  $C(1 + e) > C_{6,7} - 2W_{\min}$  таковыми становятся все движения малого тела для значений истинной аномалии основных тел  $v \in (\pi/2, \pi]$ . Для  $v \leq \pi/2$  остаются области недоступности, ограниченные "занавесями", аналогичными таковым в круговой задаче.

Пульсирующие поверхности минимальной энергии для  $v \leq \pi/2$  продолжают существовать для  $C < 0$  до  $C \rightarrow -\infty$ , когда все поверхности стягиваются к бесконечно удаленному двуполостному гиперboloиду.

Поведение поверхностей минимальной энергии для достаточно больших значений эксцентриситета может отличаться от вышеописанного. При изменении истинной аномалии пульсирующие поверхности могут охватывать не одну точку либрации, как было рассмотрено выше, а две и более таких точек.

Все изложенные выше результаты получены во вращающейся и пульсирующей системе координат Шапнера  $xyz$ .

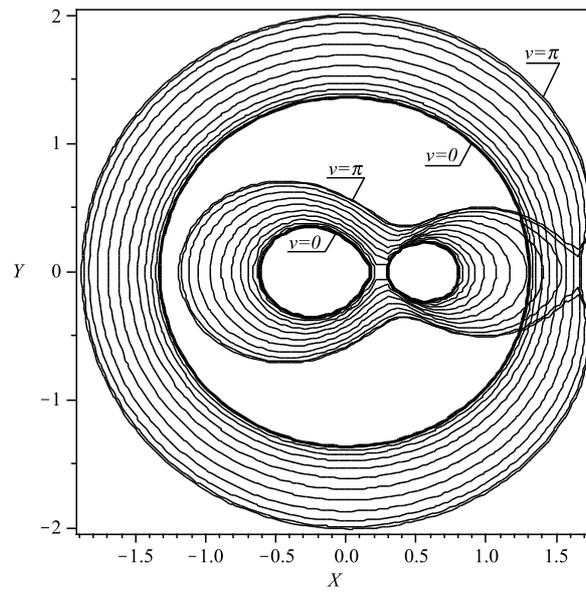


Рис. 3.11. Сечение плоскостью  $XY$  поверхностей минимальной энергии для  $\mu = 0.3$ ,  $e = 0.25$  и  $C = 1$

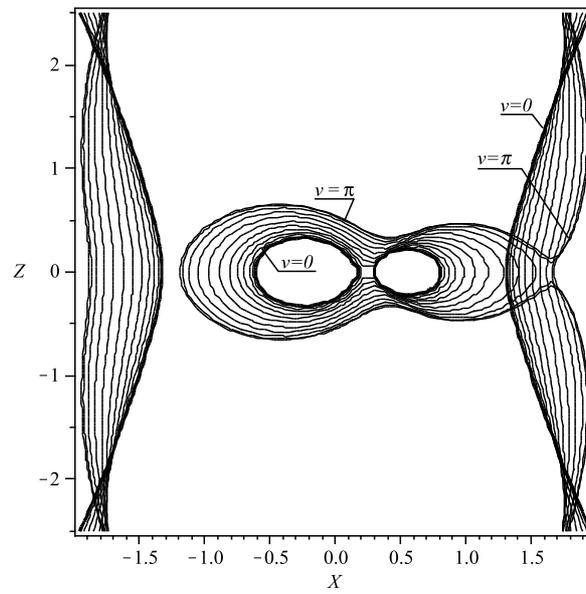


Рис. 3.12. Сечение плоскостью  $XZ$  поверхностей минимальной энергии для  $\mu = 0.3$ ,  $e = 0.25$  и  $C = 1$ .

Для перехода к непульсирующей (но вращающейся) системе координат  $XYZ$ , следует воспользоваться формулами перехода:

$$X = \rho x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho z. \quad (3.84)$$

Уравнение поверхностей минимальной энергии в системе координат  $XYZ$  запишется в виде

$$\begin{aligned} & (X^2 + Y^2 - eZ^2 \cos v)(1 + e \cos v) + \\ & + \frac{2}{(1 + e \cos v)^2} \left( \frac{1 - \mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) - \frac{2W_{\min}}{1 + e \cos v} = C, \end{aligned} \quad (3.85)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\left( X + \frac{\mu}{1 + e \cos v} \right)^2 + Y^2 + Z^2}, \\ R_2 &= \sqrt{\left( X + \frac{\mu - 1}{1 + e \cos v} \right)^2 + Y^2 + Z^2}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

На рис. 3.9 и 3.10 представлены сечения координатными плоскостями поверхностей минимальной энергии для  $\mu = 0.3$ ,  $e = 0.2$  и  $C = 1$  в пульсирующих вращающихся координатах  $xyz$ , а на рис. 3.11 и 3.12 эти же поверхности изображены в непульсирующей системе координат  $XYZ$ .

Процесс построения поверхностей минимальной энергии показывает, что имеется определенное сходство их с поверхностями нулевой скорости в ограниченной круговой задаче трех тел. Но, вместе с тем, имеются принципиальные отличия, обусловленные пульсацией поверхностей минимальной энергии, наличием компланарных особых точек, а также существованием граничных поверхностей для сколь угодно больших положительных энергий.

### 3.3.7 Некоторые астрономические приложения поверхностей минимальной энергии

Понятие устойчивости по Хиллу остается справедливым и для эллиптической задачи. Критерий устойчивости

по Хиллу для движений спутникового типа вблизи одного из основных тел можно получить из (3.83) в виде

$$C > \frac{C_2 - 2W_{\min}}{1 - e}. \quad (3.87)$$

Тогда для любых значений  $v$  будет выполняться неравенство  $C(1 + e \cos v) > C_2 - 2W_{\min}$ . Если же  $C(1 + e) > C_2 - 2W_{\min} > C(1 - e)$ , то движения спутникового типа будут неустойчивы по Хиллу, хотя для значений  $v$  в окрестности перицентра еще происходят движения устойчивого по Хиллу характера. При  $C(1 + e) < C_2 - 2W_{\min}$  имеет место безусловная неустойчивость движений спутникового типа.

Устойчивость по Хиллу сравнительно слабо зависит от массового параметра  $\mu$ , в то время как зависимость от эксцентриситета весьма сильная. С увеличением  $e$  области устойчивости уменьшаются. При  $e \rightarrow 1$  любые движения спутникового типа становятся неустойчивыми по Хиллу.

Аналогичным образом можно рассмотреть устойчивость по Хиллу движений внутри "гантели", охватывающей оба основных тела. Критерием устойчивости по Хиллу для таких движений является выполнение неравенства

$$C > \frac{C_3 - 2W_{\min}}{1 - e}. \quad (3.88)$$

В рамках ограниченной круговой задачи Солнце-Земля-Луна Дж.Хилл установил, что движение Луны относительно Земли устойчиво, так как выполняется неравенство  $C = 3.25440 > C_2 = 3.0009264$ .

Полученные выше результаты дают возможность проверить выполнение условия устойчивости по Хиллу с учетом эллиптичности орбиты Земли. Для этого необходимо проверить выполнение неравенства (3.88), где  $C_2 = 3.0009264$  — значение постоянной Якоби в точке либрации  $L_2$  (это значение совпадает с аналогичной величиной для круговой задачи). Принимая эксцентриситет орбиты Земли равным  $e = 0.01675104$ , а отношение суммы масс Земли и Луны к массе Солнца равным 1:328906, получим  $C(1 - e) + 2W_{\min} =$

$= 3.23284 > 3.0009264$ . Следовательно, в рамках эллиптической задачи геоцентрическая орбита Луны остается устойчивой по Хиллу. Если бы эксцентриситет орбиты Земли был в пять раз больше, то движение Луны было бы неустойчивым по Хиллу.

Другим приложением является возможность использования критерия Тиссерана для отождествления малых тел в системе Солнце–Юпитер с учетом движения Юпитера по эллиптической орбите. Если обозначить через  $v_1, \Omega_1$  и  $V_1$  значения истинной аномалии Юпитера, функции  $\Omega$  и скорости  $V$  малого тела при его первом наблюдении, а через  $v_2, \Omega_2$  и  $V_2$  - при втором, то можно записать неравенство

$$\frac{V_1^2}{2} - \Omega_1 + \frac{W_{\min}}{1 + e \cos v_1} - \frac{V_2^2}{2} + \Omega_2 - \frac{W_{\min}}{1 + e \cos v_2} \quad \begin{cases} > 0, \\ < 0, \end{cases} \quad (3.89)$$

где верхний знак неравенства выполняется при условии  $\cos v_1 > \cos v_2$ , а нижний - при  $\cos v_1 < \cos v_2$ . Вводя стандартные обозначения для оскулирующих элементов орбиты малого тела при первом и втором наблюдениях соответственно  $a_1, p_1, i_1$  и  $a_2, p_2, i_2$ , эти неравенства запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{a_1} - 2\sqrt{p_1} \cos i_1 - \frac{2W_{\min}}{1 + e \cos v_1} - \\ - \frac{1}{a_2} - 2\sqrt{p_2} \cos i_2 - \frac{2W_{\min}}{1 + e \cos v_2} \end{cases} \quad \begin{cases} > 0, \\ < 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

Отсюда видно, что критерий Тиссерана для эллиптической ограниченной задачи трех тел представляется неравенством (вместо равенства в круговой задаче).

Представляет интерес приложение полученных результатов к исследованию тесных двойных звезд. При изучении эволюции тесных двойных звездных систем широко используется модель Роша. Фигуры равновесия и размеры звезд представляются эквипотенциальными поверхностями сферической и грушевидной формы.

Обычно для объяснения перетекания массы рассматриваются полости гантелевидной и грушевидной формы. Пе-

ретенание вещества считается происходящим через горловину вблизи внутренней точки Лагранжа  $L_2$  гантелеобразной полости Роша от звезды-гиганта ко второй звезде, возможно, релятивистской. Построение полостей Роша производится при помощи поверхностей нулевой скорости ограниченной круговой задачи трех тел, т.е. в предположении, что движения компонент двойной звезды происходят по круговым орбитам. Для эллиптических орбит, а таковыми являются большинство орбит звезд (для некоторых двойных звезд эксцентриситет достигает значений 0.8 и более), модель ограниченной круговой задачи, строго говоря, вообще не применима, но, тем не менее, ее используют ввиду отсутствия другой более приемлемой небесно-механической модели.

Для эллиптической задачи (в отличие от модели круговой задачи) перетекание будет либо прерывистым, либо непрерывным (при небольших значениях эксцентриситета), но с периодически изменяющейся интенсивностью. Пульсирующий характер перетекания вещества уверенно наблюдается во многих тесных двойных звездных системы. Использование поверхностей минимальной энергии в ограниченной эллиптической задаче трех тел дает возможность теоретического объяснения этого явления.

## Глава 4

# ОБЩАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

В течении последних трехсот лет задача трех тел играла важную роль в развитии математического естествознания. Ей точные науки обязаны многими эффективными методами исследования. И по сей день задача трех тел находится на переднем крае научного прогресса. Благодаря математической простоте формулировки задачи, она служит "пробным камнем" для всех новых методов исследования движений небесных тел и, в частности, планет Солнечной системы. В предлагаемой главе таким "пробным камнем" являются поверхности Зундмана, которые ранее никем не изучались.

### 4.1 Уравнения движения и строгие частные решения

Если массы тел  $M_1, M_2, M_3$  обозначить соответственно через  $m_1, m_2, m_3$ , то уравнения (2.20) позволят записать ба-

рицентрические уравнения задачи трех тел в виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{s}}_1 &= \frac{fm_1m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \frac{fm_1m_3}{r_{31}^3} \vec{r}_{31}, \\ m_2 \ddot{\vec{s}}_2 &= \frac{fm_2m_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} - \frac{fm_2m_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \\ m_3 \ddot{\vec{s}}_3 &= \frac{fm_3m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \frac{fm_3m_2}{r_{23}^3} \vec{r}_{23}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$ ,  $\vec{r}_{23} = -\vec{r}_{32} = \vec{s}_3 - \vec{s}_2$ ,  $\vec{r}_{31} = -\vec{r}_{13} = \vec{s}_1 - \vec{s}_3$ .

С помощью соотношений

$$\begin{aligned} \vec{r}_{ij} &= \vec{s}_j - \vec{s}_i, \quad \dot{\vec{r}}_{ij} = \dot{\vec{s}}_j - \dot{\vec{s}}_i, \quad \ddot{\vec{r}}_{ij} = \ddot{\vec{s}}_j - \ddot{\vec{s}}_i, \\ (i, j &= 1, 2, 3, i \neq j) \end{aligned} \quad (4.2)$$

уравнения (4.1) можно преобразовать в уравнения относительного движения вида (2.66):

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{12} &= -\frac{f(m_1 + m_2)}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} + \frac{fm_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} + \frac{fm_3}{r_{31}^3} \vec{r}_{31}, \\ \ddot{\vec{r}}_{23} &= -\frac{f(m_2 + m_3)}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} + \frac{fm_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} + \frac{fm_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \\ \ddot{\vec{r}}_{31} &= -\frac{f(m_3 + m_1)}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} + \frac{fm_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} + \frac{fm_2}{r_{23}^3} \vec{r}_{23}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

К сожалению, получить общее решения уравнений движения задачи трех тел в конечной аналитической форме невозможно. Но эти уравнения допускают существование простых частных решений, аналогичных рассмотренным выше стационарным решениям в ограниченной задаче трех тел. Это - прямолинейные (коллинеарные) решения, обнаруженные Эйлером, и треугольные, найденные Лагранжем. Докажем существование этих решений непосредственной проверкой их удовлетворения уравнениям движения.

Коллинеарные (эйлеровы) решения характеризуются расположением всех трех тел в любой момент времени на од-

ной прямой, проходящей через центр масс системы тел. Сама прямая может оставаться неподвижной в барицентрическом пространстве (случай прямолинейных движений тел) или вращаться вокруг центра масс, отслеживая синхронные эллиптические, гиперболические или параболические кеплеровские движения тел. Эксцентриситеты орбит у всех тел одинаковы, в то время как их большие полуоси различны. Величины больших полуосей зависят от масс тел, отношения взаимных расстояний  $r_{ij}/r_{sk}$  всегда остаются неизменными, а кеплеровские орбиты тел - подобными друг другу.

Движения тел называются *гомографическими*, если конфигурации, образованные этими телами, всегда остаются подобными. В частном случае, когда движения тел происходят по неподвижным (невращающимся) прямым, их называют *гомометическими*.

В зависимости от того какое тело располагается между двумя другими, существуют три коллинеарных решения. Для определенности рассмотрим коллинеарное решение, соответствующее расположению тел на вращающейся прямой в порядке  $M_1M_2M_3$ . Признаком существования такого гомографического решения являются условия:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}} = -\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}}, & \quad r_{12} + r_{23} = r_{31}, \\ \frac{r_{23}}{r_{12}} = \gamma = \text{const}, & \quad \frac{r_{31}}{r_{12}} = 1 + \gamma, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\gamma$  - подлежащий определению положительный параметр.

С помощью условий (4.4) уравнения (4.3) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{12} &= -\frac{f}{r_{12}^3} \left[ m_1 + m_2 - \frac{m_3}{\gamma^2} + \frac{m_3}{(1+\gamma)^2} \right] \vec{r}_{12}, \\ \gamma \ddot{\vec{r}}_{12} &= -\frac{f}{r_{12}^3} \left[ \frac{m_2 + m_3}{\gamma^2} + \frac{m_1}{(1+\gamma)^2} - m_1 \right] \vec{r}_{12}, \\ (1+\gamma) \ddot{\vec{r}}_{12} &= -\frac{f}{r_{12}^3} \left[ \frac{m_3 + m_1}{(1+\gamma)^2} + m_2 + \frac{m_2}{\gamma^2} \right] \vec{r}_{12}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из этих трех уравнений независимыми являются только два, так как третье уравнение в системе (4.5) получается сложением первых двух. Поэтому убедиться в существовании прямолинейного решения, удовлетворяющего условиям (4.4), можно выбором такого значения постоянного параметра  $\gamma$ , чтобы удовлетворялись два первых уравнения в системе (4.5). Для этого умножим первое уравнение на  $\gamma$  и вычтем из него второе. Тогда получим уравнение для определения параметра  $\gamma$  в виде

$$\gamma \left[ m_1 + m_2 - \frac{m_3}{\gamma^2} + \frac{m_3}{(1 + \gamma)^2} \right] - \left[ \frac{m_2 + m_3}{\gamma^2} + \frac{m_1}{(1 + \gamma)^2} - m_1 \right] = 0, \quad (4.6)$$

которое можно привести к уравнению пятой степени относительно  $\gamma$ :

$$(m_1 + m_2)\gamma^5 + (3m_1 + 2m_2)\gamma^4 + (3m_1 + m_2)\gamma^3 - (m_2 + 3m_3)\gamma^2 - (2m_2 + 3m_3)\gamma - (m_2 + m_3) = 0. \quad (4.7)$$

Коэффициенты многочлена пятой степени имеют одну переменную знаков, поэтому по теореме Декарта существует единственный положительный корень уравнения (4.6)  $\gamma = \gamma^*$ . При этом значении  $\gamma^*$  все три уравнения в системе (4.5) преобразуются друг в друга, и для определения орбит тел приходим к единственному дифференциальному уравнению для  $\vec{r}_{12}$

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = -\mu_0 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \mu_0 = -f \left[ m_1 + m_2 - \frac{m_3}{\gamma^{*2}} + \frac{m_3}{(1 + \gamma^*)^2} \right], \quad (4.8)$$

а векторы  $\vec{r}_{23}$  и  $\vec{r}_{31}$  затем определяются по формулам (4.4).

Непосредственно видно, что уравнение (4.8) представляет собой уравнение относительного движения точки  $M_2$  относительно точки  $M_1$  при соответствующим образом выбранном гравитационном параметре  $\mu_0$ , т.е. по законам задачи о движении двух вспомогательных (фиктивных) тел-точек.

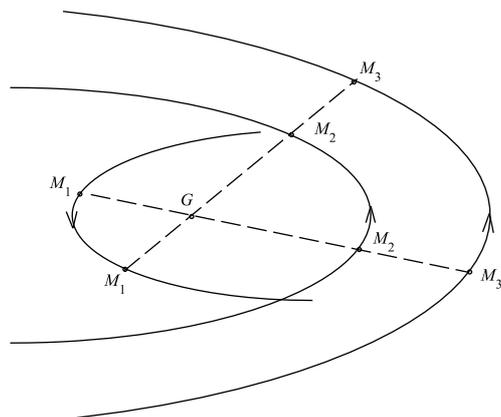


Рис. 4.1. Эйлеровы движения в задаче трех тел. Тела  $M_1, M_2, M_3$  всегда располагаются на одной прямой, изображенной пунктирной линией. Сплошными линиями изображены орбиты тел, которыми могут быть подобные эллипсы, гиперболы, параболы или прямые с фокусом в барицентре  $G$ .

Конфигурация, образуемая телами, всегда остается подобной самой себе, т.е. движения трех тел происходят по гомографическим кеплеровским орбитам, а в случае невращающейся прямой - по гомотетическим орбитам.

Таким образом, непосредственной проверкой устанавливается существование прямолинейного решения, соответствующего расположению тел на вращающейся прямой в порядке  $M_1M_2M_3$ . Аналогично можно показать существование двух других прямолинейных решений, соответствующих другому порядку расположения тел на вращающейся прямой:  $M_2M_3M_1$  или  $M_3M_1M_2$ . А соответствующее уравнение пятой степени получается из (4.7) путем круговой перестановки индексов.

Далее докажем существование треугольных (лагранжевых) решений, т.е. таких решений, согласно которым в любой момент времени тела  $M_1, M_2, M_3$  образуют равносторонний треугольник:

$$r_{12} = r_{23} = r_{31}, \quad \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31} = 0. \quad (4.9)$$

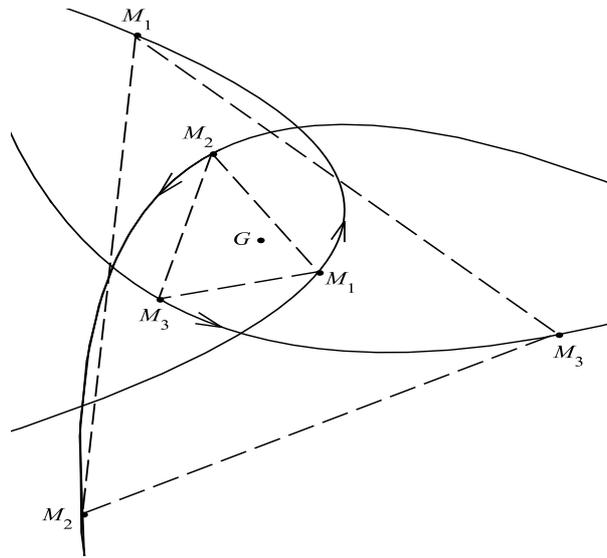


Рис. 4.2. Лагранжевы движения в задаче трех тел. Тела  $M_1, M_2, M_3$  всегда образуют равносторонний треугольник, изображаемый пунктирными линиями. Сплошными линиями изображены орбиты тел (эллипсы, гиперболы, параболы или прямые с фокусом в барицентре  $G$ ).

С учетом этих условий все уравнения в системе (4.3) предстанут в одинаковом виде

$$\ddot{\vec{r}}_{ij} = -\frac{fm}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, \quad (4.10)$$

где  $m = m_1 + m_2 + m_3$ ;  $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ .

Отсюда видно, что уравнения задачи трех тел (4.3) будут удовлетворены тождественно, если относительные движения каждой пары тел  $M_i$  и  $M_j$  определять уравнениями относительного движения вспомогательной задачи двух тел с гравитационным параметром  $fm$ , т.е. уравнениями (4.10). Уравнения (4.9) и (4.10) доказывают существование двух лагранжевых решений - одно соответствует обходу вершин треугольника  $M_1M_2M_3$  по часовой стрелке, второе в противоположном направлении.

Из уравнений (4.10) ясно, что движения каждого из трех тел являются плоскими и происходят по одному и тому же коническому сечению с одинаковым эксцентриситетом. Но орбиты тел повернуты относительно друг друга на  $\pm 120^\circ$ .

Барицентрические уравнения движения трех тел (4.1) с учетом условий (4.9) представляются в виде

$$\ddot{\vec{s}}_i = -\frac{\mu_i}{s_i^3} \vec{s}_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.11)$$

где обозначено

$$\mu_i = \frac{f(m_{i+1}^2 + m_{i+2}^2 + m_{i+1}m_{i+2})^{3/2}}{m^2}. \quad (4.12)$$

Если в последней формуле  $m_{i+1}$  или  $m_{i+2}$  получаются равными  $m_4$  или  $m_5$ , то их следует заменить на  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

Из (4.11) следует, что в барицентрической системе координат три тела движутся вокруг центра масс по компланарным кеплеровским орбитам (эллипсам, гиперболам, параболам или прямым) с одинаковым эксцентриситетом, истинной аномалией, временем прохождения через перигеум и периодом (при  $e < 1$ ) обращения по таким законам, что

$$s_i = \frac{p_i}{1 + e \cos v}, \quad c_i = s_i^2 \dot{v} = \sqrt{\mu_i p_i}, \quad (4.13)$$

а барицентрические расстояния  $s_i$  и разности аргументов перигеумов орбит  $\omega_j - \omega_i$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} ms_i &= r_{ij} \sqrt{m_{i+1}^2 + m_{i+2}^2 + m_{i+1}m_{i+2}}, \\ r_{ij}^2 &= s_i^2 + s_j^2 - 2s_i s_j \cos(\omega_j - \omega_i). \end{aligned} \quad (4.14)$$

В случае прямолинейных движений ( $e = 1$ ) получаются треугольные гомотетические орбиты.

Таким образом, показано, что дифференциальные уравнения движения общей задачи трех тел допускают существование трех прямолинейных (эйлеровых) и двух треугольных

(лагранжевых) частных решений. На рис.4.1 и 4.2 изображены соответственно эйлеровы и лагранжевы движения. Орбиты тел на рисунках представлены некоторыми их частями. Это могут быть части эллипса, гиперболы или параболы.

## 4.2 Поверхности Зундмана

Известное юмористическое замечание французского математика Эмиля Бореля гласит, что "в небесной механике, как и у варваров, много равняется трем". Это высказывание отражает тот факт, что интегрируемой в квадратурах является только задача двух тел. Уже задача трех тел не имеет практически пригодного общего решения, и всеобъемлющее представление о свойствах движения оказывается недостижимым. Знаменитые ряды Зундмана, представляющие математически безупречное общее решение задачи трех тел, до сих пор не нашли никаких астрономических приложений из-за их чудовищно медленной сходимости. Это лучшее свидетельство гораздо большей сложности задачи трех тел по сравнению с задачей двух тел. Общее решение дифференциальных уравнений движения задачи трех тел, существование которого гарантирует теорема Коши, по видимому, не представимо в конечной форме. Теоремы существования Брунса, Пуанкаре и обширные исследования тройных систем, выполненные методами численного интегрирования уравнений движения для различных комбинаций масс и начальных условий, подтверждают обоснованность пессимистических утверждений об аналитической интегрируемости задачи трех тел. Именно этим обстоятельством объясняется широкое применение методов качественной теории дифференциальных уравнений. Например, разработанная Виктором Себехеом на основе уравнения Лагранжа-Якоби классификация динамического поведения тройных систем является примером эффективного применения качественных методов небесной механики, представляющим также несомненный интерес для космогонии кратных звезд.

Хорошо известны еще со времен Анри Пуанкаре и многочисленные исследования устойчивости орбит, в том числе и периодических, также относящиеся к качественной теории систем дифференциальных уравнений. В отличие от количественных методов (как аналитических, так и численных), качественные методы, вообще говоря, не требуют знания частного или общего решения дифференциальных уравнений движения. Более того, эти методы позволяют судить о свойствах динамической системы, опираясь на знание отдельных первых интегралов, инвариантных соотношений, некоторых вспомогательных функций, например, функций Ляпунова. Примером, ставшим уже хрестоматийным, является понятие устойчивости в смысле Хилла, базирующееся на знаменитом интеграле Якоби в задаче Хилла - небесно механической модели, лежащей в основании современной аналитической теории движения Луны. Аналогичным образом применяется интеграл Якоби в ограниченной круговой задаче трех тел и интегральное инвариантное соотношение (квазиинтеграл Якоби) в эллиптической и гиперболической ограниченных задачах.

С помощью неравенства Зундмана, устанавливается существование области, внутри которой происходит движение пары тел, в то время как третье тело не только находится вне этой области, но и может удалиться от этой пары на бесконечно большое расстояние. Поверхности, ограничивающие области возможности движений, далее называются *поверхностями Зундмана*.

Все изучаемые поверхности будем рассматривать в прямоугольной системе координат с абсциссой  $r_{12}$ , ординатой  $r_{23}$  и аппликатой  $r_{31}$ , где  $r_{ij}$  - расстояние между телами  $M_i$  и  $M_j$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; i \neq j$ ). Физический смысл имеет та часть трехмерного изображающего пространства  $r_{12}r_{23}r_{31}$ , в которой взаимные расстояния удовлетворяют неравенствам треугольника

$$0 \leq r_{12} \leq r_{23} + r_{31}, \quad 0 \leq r_{23} \leq r_{31} + r_{12}, \quad 0 \leq r_{31} \leq r_{12} + r_{23}. \quad (4.15)$$

В трехмерном пространстве взаимных расстояний эти неравенства определяют область, ограниченную правильной треугольной пирамидой  $P$  с ребрами бесконечной длины, совпадающими с соответствующими биссектрисами координатных плоскостей.

Интеграл энергии в задаче трех тел запишем в виде

$$T - U = h, \quad (4.16)$$

где  $T$  - кинетическая энергия тройной системы,  $U$  - ее силовая функция,  $h$  - постоянная интеграла энергии.

Вместе с неравенствами (4.15) условие  $T \geq 0$  определяет область возможности движений дополнительным неравенством (имеющим нетривиальный смысл только при  $h < 0$ ):

$$U \geq C, \quad (4.17)$$

где  $C = -h$ . Эта область в пространстве взаимных расстояний представляет собой "треногу" - фигуру, обладающую головной частью, расположенной вблизи начала координат  $O$ , и исходящими из нее вдоль ребер пирамиды  $P$  тремя "ногами" бесконечной длины. Значения  $T < 0$  определяют область недоступности.

Границей этой области являются грани пирамиды  $P$  и поверхность нулевой кинетической энергии, уравнение которой имеет вид

$$U = f \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) = C, \quad (4.18)$$

где  $f$  - универсальная гравитационная постоянная,  $m_1, m_2, m_3$  - массы тел  $M_1, M_2, M_3$  соответственно. По одну сторону поверхности (4.18), внутри пирамиды  $P$ , расположена область возможности движений (4.17), по другую - область недоступности, где  $U < C$ .

Каждая "нога" области возможности движений ограничена двумя соответствующими гранями пирамиды  $P$  и поверхностью нулевой кинетической энергии. На больших удалениях от начала координат  $O$  "нога" становится тоньше и асимптотически приближается к некоторым фиксированным размерам. Если, например, тело  $M_3$  удалилось от тел  $M_1$  и  $M_2$

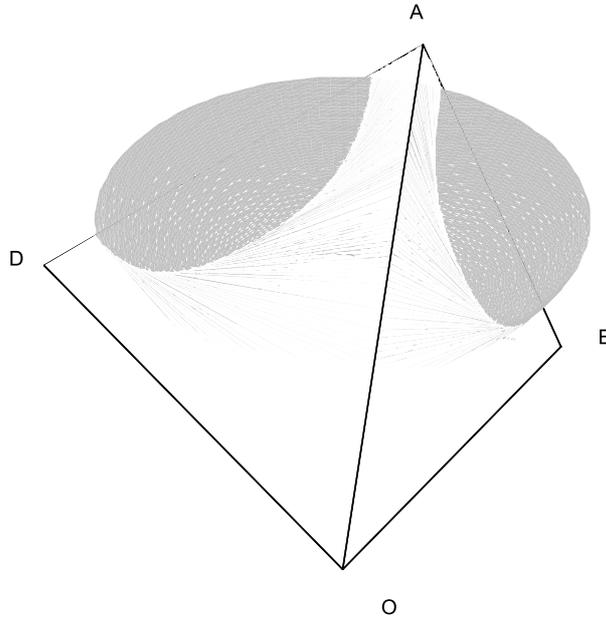


Рис. 4.3. Общий вид поверхности нулевой кинетической энергии

на значительное расстояние, такое, что отношения  $r_{12}/r_{23}$  и  $r_{12}/r_{31}$  можно считать малыми величинами, то уравнение поверхности нулевой кинетической энергии тогда можно представить в виде

$$r_{12} = \frac{fm_1m_2}{C} + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{fm_3}{C}(m_2\varepsilon_2 + m_1\varepsilon_3), \quad \varepsilon_2 = \frac{r_{12}}{r_{23}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{r_{12}}{r_{31}}, \quad (4.19)$$

где  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  - величины одного порядка малости. В пределе, при удалении тела  $M_3$  на бесконечно большое расстояние, получим

$$r_{12} \rightarrow \frac{fm_1m_2}{C}, \quad r_{23} \rightarrow \infty, \quad r_{31} \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Аналогичная картина имеет место при удалении из тройной системы тела  $M_2$  или  $M_1$ .

Отсюда, в частности, следует, что при  $h < 0$  невозможен полный распад (разлет) системы трех тел. Возможен толь-

ко "уход в бесконечность" лишь какого-то одного (притом любого) тела.

Все области возможности движений качественно имеют одинаковый вид, представленный в изометрии на рис. 4.3, где изображены: пирамида  $P$  в виде усеченной пирамиды  $OADE$  и пересекающаяся с ней поверхность нулевой кинетической энергии - сетчатая поверхность. На рисунке видна головная часть "треноги", прилегающая к началу координат  $O$ , и исходящие из нее три "ноги", усеченные плоскостью треугольника  $ADE$ .

Все физически возможные движения трех тел будут всегда изображаться некоторыми кривыми или точками, расположенными внутри пирамиды  $P$ , включая ее грани. Например, лагранжевы треугольные и эйлеровы прямолинейные решения для случая круговых движений тел изображаются соответственно точками на высоте пирамиды и ее гранях, а для случаев эллиптических и гиперболических движений трех тел - некоторыми отрезками и лучами прямых. Кривые и точки, расположенные вне пирамиды, не имеют физического смысла, так как для них нарушаются неравенства треугольника (4.15).

Сечения поверхностей нулевой кинетической энергии можно определять по-другому, а именно, плоскостью, перпендикулярной к высоте пирамиды  $P$ , и ортогональной к ней плоскостью, проходящей через точку  $A$  и высоту пирамиды  $P$ . Для этого осуществим переход от взаимных расстояний  $r_{12}, r_{23}, r_{31}$  к линейным функциям этих расстояний  $q_{12}, q_{23}, q_{31}$  по формулам преобразования

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}} q_{12} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} q_{31}, \\ r_{23} &= \frac{1}{\sqrt{3}} q_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} q_{23} + \frac{1}{\sqrt{6}} q_{31}, \\ r_{31} &= \frac{1}{\sqrt{3}} q_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} q_{23} + \frac{1}{\sqrt{6}} q_{31}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Система координат  $Oq_{12}q_{23}q_{31}$  выбрана так, что ось  $Oq_{12}$  направлена по высоте пирамиды  $P$ .

Сечение пирамиды  $P$  плоскостью  $q_{12} = d$ , где  $d$  - некоторая заранее выбранная постоянная величина, всегда определяет равносторонний треугольник  $ADE$  со стороной, равной  $d\sqrt{3}/\sqrt{2}$ .

Сечения семейства (4.18) плоскостями  $q_{12} = d$  можно проводить либо при фиксированном  $d \in (0, \infty)$  для различных значений  $C \in (0, \infty)$ , либо, наоборот, при фиксированном  $C$  для различных значений  $d$ . При этом результат будет одним и тем же, что является следствием подобия и подобного расположения поверхностей нулевой кинетической энергии относительно начала координат  $O$ . Поэтому все семейство поверхностей (4.18) можно изучить, исследуя какую-нибудь одну единственную поверхность. Но, следуя сложившимся традициям, будем определять сечения семейства поверхностей для различных значений энергии  $C$  при фиксированном значении параметра  $d$ , подчиненном условию  $d = 1$ .

Последнее равенство можно рассматривать как выбор единицы измерения длины. Кроме того, за единицу измерения массы примем сумму масс трех тел  $m = m_1 + m_2 + m_3 = 1$ , а единицу измерения времени выберем так, чтобы выполнялось условие  $f = 1$ . Подобный выбор единиц измерения часто используется в ограниченной задаче трех тел. Он удобен для графических построений и используется на всех приведенных далее рисунках.

Во втором и третьем столбцах таблицы 4.1 приведены координаты характерных точек в системах координат  $O r_{12} r_{23} r_{31}$  и  $O q_{12} q_{23} q_{31}$ .

Поверхности нулевой кинетической энергии (4.18) тогда примут вид

$$U = \frac{m_1 m_2}{\frac{1}{\sqrt{3}} q_{12} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} q_{31}} + \frac{m_2 m_3}{\frac{1}{\sqrt{3}} q_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} q_{23} + \frac{1}{\sqrt{6}} q_{31}} + \frac{m_3 m_1}{\frac{1}{\sqrt{3}} q_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} q_{23} + \frac{1}{\sqrt{6}} q_{31}} = C. \quad (4.22)$$

На рис. 4.4 и 4.5 приведены сечения поверхностей (4.22) для значений масс  $m_1 = 1/2$ ,  $m_2 = 1/3$ ,  $m_3 = 1/6$ . Сечения плоскостью  $q_{12} = d$  показывают, что для очень больших

Таблица 4.1. Координаты характерных точек при  $d = 1$ .

Точка	В системе $Or_{12}r_{23}r_{31}$	В системе $Oq_{12}q_{23}q_{31}$
$O$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$
$A$	$(0, \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$	$(1, 0, 1/\sqrt{2})$
$D$	$(\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2)$	$(1, -\sqrt{3}/(2\sqrt{2}), -1/(2\sqrt{2}))$
$E$	$(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 0)$	$(1, \sqrt{3}/(2\sqrt{2}), -1/(2\sqrt{2}))$
$F$	$(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/4, \sqrt{3}/4)$	$(1, 0, -1/(2\sqrt{2}))$

Таблица 4.2. Продолжение таблицы 4.1.

Точка	В системе $Op_{12}p_{23}p_{31}$
$O$	$(0, 0, 0)$
$A$	$(1/\sqrt{2}, 0, -1)$
$D$	$(3/(2\sqrt{2}), \sqrt{3}/(2\sqrt{2}), 0)$
$E$	$(3/(2\sqrt{2}), -\sqrt{3}/(2\sqrt{2}), 0)$
$F$	$(3/(2\sqrt{2}), -\sqrt{3}/(4\sqrt{2}), 0)$

значений  $C$  области возможности движений состоят из трех частей: либо вблизи точки  $A$  (окрестность точки  $A$  соответствует тесному сближению тел  $M_1$  и  $M_2$ ), когда расстояние  $r_{12}$  между телами  $M_1$  и  $M_2$  мало, а тело  $M_3$  располагается на достаточно большом удалении от тел  $M_1$  и  $M_2$ , либо вблизи точки  $D$ , когда  $r_{23}$  мало, либо вблизи точки  $E$  при малом  $r_{31}$ . Из сечений плоскостью  $q_{23} = 0$  видно, что с приближением к началу координат три "ноги" сливаются, образуя общую головную часть "треноги".

Сечения плоскостью  $q_{12} = 1$  показывают также, что с уменьшением константы  $C$  области вблизи точек  $A, D, E$  увеличиваются, достигая при некотором значении  $C$  общей точки, расположенной на одной из сторон треугольника  $ADE$ . В зависимости от значений масс тел эти точки могут появляться в различной последовательности или одновременно.

Дальнейшее уменьшение  $C$  приводит к образованию внутри треугольника  $ADE$  сначала двусвязной, а затем односвяз-

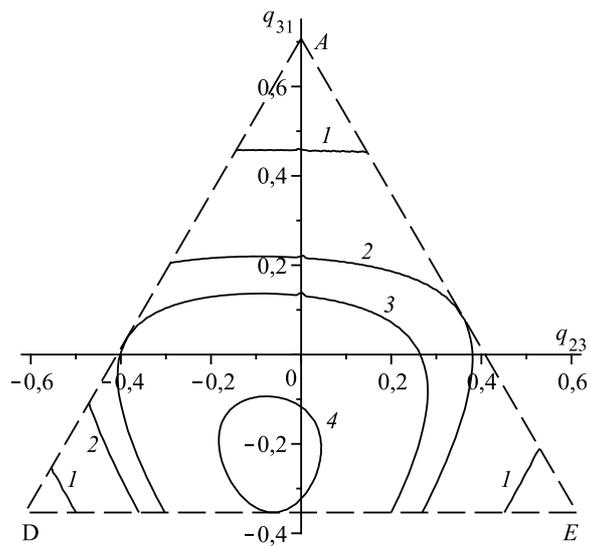


Рис. 4.4. Сечения поверхностей нулевой кинетической энергии плоскостью  $q_{12} = 1$  при  $m_1 = 1/2, m_2 = 1/3, m_3 = 1/6$ . Штриховые прямые - сечения пирамиды  $OADE$ , пронумерованные сплошные кривые: 1 -  $C = 1$ , 2 -  $C = 0.625$ , 3 -  $C = 0.575$ , 4 -  $C = 0.51$ .

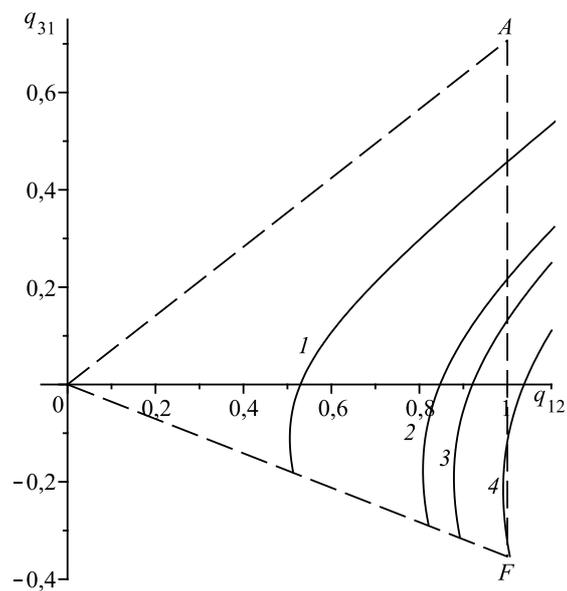


Рис. 4.5. Сечения поверхностей нулевой кинетической энергии плоскостью  $q_{23} = 0$ . Все обозначения - см. рис 4.4.

ной области возможности движения, прилегающей к сторонам треугольника. В центральной части треугольника располагается область недоступности. При последующем уменьшении  $C$  сечение области недоступности стягивается в точку, а область возможности движения заполняет весь треугольник  $ADE$ .

Далее с уменьшением  $C$  области недоступности продолжают существовать, но с плоскостью  $q_{12} = 1$  они не пересекаются, располагаясь в части пространства, где  $q_{12} > 1$ . На рисунках 4.4 и 4.5 их можно обнаружить по сечениям поверхностей нулевой кинетической энергии плоскостью  $q_{23} = 0$ . Только при  $C \rightarrow 0$  области недоступности полностью исчезают, и движение может изображаться любой точкой или кривой внутри и на гранях пирамиды  $P$ .

Наличие замкнутых областей в сечениях поверхностей (4.22) около вершин треугольника  $ADE$  при больших значениях  $C$  не доказывает существования движений спутникового типа, т.е. устойчивости по Хиллу, так как эти замкнутые области представляют собой сечения трех "ног" единой области - "треноги". Это видно также из сечений плоскостью  $q_{23} = 0$ . Поэтому нельзя утверждать, что в рассматриваемом случае движения тел всегда будут изображаться кривой, близкой к одной из вершин треугольника  $ADE$ . Передвигаясь вдоль "ноги" в сторону начала координат, изображающая точка может через головную часть "треноги" переместиться в другую "ногу", иллюстрируя распад одной и возникновение другой тесной пары. Однако при  $h < 0$  всегда будет существовать, по крайней мере, одна тесная пара тел. Какие конкретно тела образуют такую пару заранее сказать невозможно, так как тела могут обмениваться "спутником". Иными словами, неравенство  $h < 0$  не допускает полного распада тройной системы, при котором все взаимные расстояния стремятся к бесконечности. Такая ситуация может возникнуть только при  $h \geq 0$ . Последнее неравенство, как известно, есть достаточное условие неустойчивости системы небесных тел в смысле Лагранжа.

Построение областей возможности движений удобнее про-

вести с помощью неравенства Зундмана, записанного в барицентрической системе координат (2.56):

$$2I(U + h) - c^2 \geq 0, \quad (4.23)$$

где  $c$  - модуль полного момента количества движения тройной системы,  $h$  - полная механическая энергия. Через  $I$  здесь обозначен момент инерции системы трех тел относительно начала барицентрической прямоугольной системы координат:

$$I = \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (4.24)$$

Учитывая, что для действительных движений  $(dI/dt)^2 \geq 0$ , из (4.23) получим неравенство, удобное для построения областей возможности движений:

$$S(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = I(U - C) \geq B, \quad (4.25)$$

где  $C = -h$ , а  $B = c^2/2$  - постоянная Зундмана.

Поверхность, ограничивающая эту область, описывается уравнением  $S(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = B$  или в явном виде:

$$\frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2}{m} \left[ f \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) - C \right] = B, \quad (4.26)$$

где  $f$  - ньютоновская гравитационная постоянная,  $m = m_1 + m_2 + m_3$ .

В честь автора неравенства (4.23) поверхности (4.26) будем называть *поверхностями Зундмана*. Поверхности нулевой кинетической энергии являются частным случаем поверхностей Зундмана, соответствующим значению  $B = 0$ .

Как и поверхности нулевой кинетической энергии, поверхности Зундмана являются функциями трех взаимных расстояний. Поэтому их построение будем производить в использованных ранее координатных системах  $Or_{12}r_{23}r_{31}$  и

$Oq_{12}q_{23}q_{31}$ . Кроме того, введем в рассмотрение новую систему  $Op_{12}p_{23}p_{31}$ , связанную с системой  $Or_{12}r_{23}r_{31}$  зависимостями

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{2}{\sqrt{6}} p_{12} + \frac{1}{\sqrt{3}} p_{31}, \\ r_{23} &= \frac{1}{\sqrt{6}} p_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} p_{23} - \frac{1}{\sqrt{3}} p_{31}, \\ r_{31} &= \frac{1}{\sqrt{6}} p_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} p_{23} - \frac{1}{\sqrt{3}} p_{31}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Новая система координат выбрана так, что ось  $Op_{31}$  направлена по нормали к грани  $ODE$  пирамиды  $P$ , ось  $Op_{12}$  - по биссектрисе угла  $DOE$ , а ось  $Op_{23}$  дополняет систему координат до правой. Координаты характерных точек в этой системе координат приведены в таблице 4.2.

Для определения особых точек поверхностей Зундмана рассмотрим систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r_{12}} &= 2 \frac{m_1 m_2}{m} r_{12} (U - C) - \frac{f m_1 m_2}{r_{12}^2} I = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial r_{23}} &= 2 \frac{m_2 m_3}{m} r_{23} (U - C) - \frac{f m_2 m_3}{r_{23}^2} I = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial r_{31}} &= 2 \frac{m_3 m_1}{m} r_{31} (U - C) - \frac{f m_3 m_1}{r_{31}^2} I = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из этих уравнений легко получаем:

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = \sqrt[3]{\frac{f m I}{2(U - C)}}. \quad (4.29)$$

Для получения конкретных значений взаимных расстояний подставим в (4.28) выражения для  $U$  из (4.18) и  $I$  из (4.24). Тогда, учитывая (4.29), получим уравнение для определения взаимных расстояний  $r_{ij}$  в виде:

$$r_{ij} \left( r_{ij} - \frac{f m^*}{2C} \right) = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (4.30)$$

Здесь введено обозначение  $m^* = m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1$ .

Решение уравнения (4.30) определяет одну треугольную особую точку

$$L_{45} = \left( \frac{fm^*}{2C}, \frac{fm^*}{2C}, \frac{fm^*}{2C} \right). \quad (4.31)$$

Эта особая точка одновременно является образом двух треугольных точек либрации  $L_4$  и  $L_5$ , определяющих круговые лагранжевы решения в задаче трех тел.

Треугольная особая точка располагается на высоте пирамиды  $P$ . Для различных значений постоянной  $C$  получаются разные точки. Вся совокупность таких особых точек всюду плотно заполняет высоту пирамиды  $P$ .

Если координаты особой точки  $L_{45}$  подставить в уравнение семейства (4.26), то для заданного  $C$  получим значение постоянной Зундмана  $B = B_{45}$ , соответствующее особой точке  $L_{45}$ :

$$B_{45} = \frac{f^2 m^{*3}}{4mC}. \quad (4.32)$$

Уравнение (4.30) допускает также тривиальное решение  $r_{ij} = 0$  (тройное соударение), которое определяет особую точку  $L_0$  семейства (4.26), совпадающую с началом координат  $O$ :  $L_0 = (0, 0, 0)$ . Этой особой точке соответствует значение  $B = B_0 = 0$ . Точку  $L_0$  можно рассматривать как одну из треугольных точек, соответствующую предельному значению  $C \rightarrow \infty$ .

Треугольную особую точку  $L_{45}$  можно классифицировать как коническую особую точку с осью конуса, совпадающей с осью  $Oq_{12}$ . Точка  $L_0$  является более сложной особой точкой. Через нее проходит каждая поверхность Зундмана для любых значений  $B$ , вследствие чего ее можно классифицировать как сложную особую точку.

Никаких других действительных решений система (4.28) не имеет. Однако эта система не определяет всех особых точек поверхностей Зундмана. Дело в том, что рассматриваемое трехмерное пространство взаимных расстояний (внутренняя часть пирамиды  $P$  и ее грани) отличается от обыч-

ных открытых декартовых пространств тем, что оно является замкнутым на гранях пирамиды  $P$ . Поэтому поиск особых точек следует проводить и на гранях пирамиды  $P$ , что невозможно осуществить с помощью только уравнений (4.28).

Прямолинейные особые точки располагаются на гранях пирамиды  $P$ . Они являются образами известными коллинеарных точек либрации. Поэтому для их определения можно воспользоваться известными методами, например, изложенным в предыдущем разделе. В частности, координаты прямолинейной особой точки, лежащей на грани  $ODE$ , когда

$$r_{12} = r_{23} + r_{31}, \quad (4.33)$$

получаются при помощи уравнения пятой степени (4.7), после численного решения которого взаимные расстояния вычисляются по формулам

$$r_{23} = \gamma r_{31}, \quad r_{12} = (1 + \gamma)r_{31}, \quad (4.34)$$

где  $\gamma$  - единственный положительный корень уравнения (4.7).

Таким образом, на каждой грани пирамиды  $P$  располагается одна прямолинейная особая точка поверхностей Зундмана, которая одновременно является прямолинейной точкой либрации для круговых движений трех тел.

Каждая прямолинейная точка является узловой особой точкой кривых, образованных пересечением проекций поверхностей Зундмана на соответствующую грань пирамиды  $P$ . Особым точкам  $L_1, L_2, L_3$  соответствуют значения постоянной Зундмана  $B_1, B_2, B_3$ , которые определяются после вычисления взаимных расстояний.

Заметим, что в неограниченном пространстве  $r_{12}r_{23}r_{31}$  эти точки являются седловидными точками поверхностей Зундмана и не являются особыми, так как плоскость соответствующей грани пирамиды  $P$  является единственной касательной плоскостью к поверхности Зундмана в этой точке. Производная от функции  $S$  по направлению, перпендикулярному соответствующей грани, отлична от нуля, например, для точки  $L_1$  это производная  $\partial S / \partial p_{13} \neq 0$ .

Никаких других особых точек поверхности Зундмана не имеют.

Исследование поверхностей Зундмана будем проводить с помощью сечений плоскостями  $q_{12} = d$ ,  $q_{23} = 0$  и плоскостью  $ODE$  ( $p_{31} = 0$ ) пирамиды  $P$  с использованием ранее выбранной системы единиц измерения.

Величина  $d$  выбирается равной значению координаты  $q_{12}$  для первой точки либрации  $L_1$ . Нумерация прямолинейных точек либрации соответствует порядковому номеру их появления в процессе уменьшения постоянной Зундмана от  $\infty$  до 0.

Сечения пирамиды  $P$  на приводимых рисунках изображаются пунктирными линиями. Все части поверхности Зундмана, располагающиеся вне граней пирамиды  $P$ , не имеют физического смысла, тем не менее сечения некоторых из них также приводятся для более полного геометрического представления о поверхностях Зундмана.

Прежде всего заметим, что при  $B = 0$  неравенство (4.25) превращается в неравенство  $U \geq C$ , определяющее область возможности движения, ограниченную поверхностью нулевой кинетической энергии  $U = C$ . Это означает, что при заданном  $C$  области возможности движения для любых значений  $B$  располагаются между соответствующей поверхностью нулевой кинетической энергии и гранями пирамиды  $P$ , прилегая к последним. А область недоступности, расположенная по другую сторону поверхности Зундмана, всегда охватывает аналогичную область недоступности для соответствующей поверхности нулевой кинетической энергии и только при  $B = 0$  совпадает с ней.

Поэтому поверхности Зундмана суть более строгие границы областей возможности движений и областей недоступности по сравнению с поверхностями нулевой кинетической энергии, которые являются частным случаем поверхностей Зундмана, соответствующим значению  $B = 0$ .

Рассмотрим более подробно изменение поверхностей Зундмана в процессе уменьшения постоянной  $B$  от  $\infty$  до 0 при заданном постоянном значении  $C > 0$ .

Каждое заданное значение  $C$  определяет поверхность нулевой кинетической энергии и соответствующую ей область недоступности. Исключая эту область недоступности из внутренней части пирамиды  $P$ , получим область, в которой располагаются все поверхности Зундмана при заданном  $C$  и  $0 \leq B < \infty$ . Для разных значений заданной величины  $C$  получаются разные количественные характеристики поверхностей Зундмана, но качественный характер и последовательность бифуркаций поверхностей Зундмана остаются неизменными и соответствуют описанному ниже "сценарию".

При  $B = \infty$  область возможности движений отсутствует. Вся пирамида  $P$  оказывается в области недоступности, а тела располагаются либо на бесконечных расстояниях друг от друга, либо на ребрах пирамиды, либо в одной точке - начале координат  $O$ .

Если величина  $B$  очень большая, но конечная, то область возможности движений представляет собой три узкие "ноги" располагающиеся внутри пирамиды  $P$  вдоль ее ребер. Толщины "ног" с приближением к началу координат  $O$  для любых значений постоянных Зундмана  $B$  стремятся к нулю, а с удалением в бесконечность сначала увеличиваются, а затем асимптотически приближаются к размерам, определяемым поверхностью нулевой кинетической энергии с тем же значением постоянной  $C$ . При удалении одного из тел, например, тела  $M_3$  от двух других на бесконечно большое расстояние уравнения поверхности Зундмана, как и уравнения поверхности нулевой кинетической энергии, представляются в виде (4.19). А предельные значения взаимных расстояний принимают те же самые значения (4.20), причем эти результаты справедливы для любых значений  $B$  при фиксированном  $C$ . Аналогичные результаты имеют место для двух других "ног". Такую область возможности движений можно также считать "треногой", но с головной частью, вырождающейся в точку  $O$  - начало координат. Общий вид "треноги" представлен на рис. 4.6, а на рис. 4.7 и 4.8 изображены сечения поверхностей Зундмана для выбранных значений масс тел:  $m_1 = 1/2$ ,  $m_2 = 1/3$ ,  $m_3 = 1/6$ .

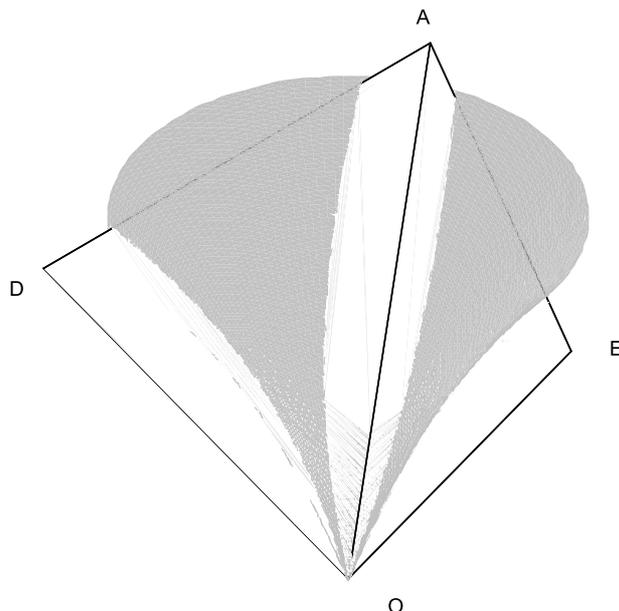


Рис. 4.6. Общий вид поверхности Зундмана

Из этих результатов можно сделать сразу два важных вывода. Во-первых, из бесконечных размеров "ног" следует, что поверхности Зундмана всегда допускают уход одного из тел в бесконечность. Это подтверждается тем, что при бесконечном удалении от начала координат любая поверхность Зундмана асимптотически сближается с поверхностью нулевой кинетической энергии.

Во-вторых, каждая из трех "ног" не имеет общих точек с другими "ногами" (исключая начало координат), что гарантирует "вечное" существование одной близкой пары тел, соответствующее положению изображающей точки внутри одной из "ног".

Если изображающая точка в начальный момент времени расположена в одной из "ног", то она останется в этой области навсегда, что означает устойчивость по Хиллу движения соответствующей пары тел. Каждая из трех "ног" соответствует спутниковому типу движения, когда два тела всегда

располагаются в некоторой конечной окрестности друг друга, а третье тело может быть удалено от этой пары на достаточно большое или даже бесконечное расстояние. Внутри каждой из трех "ног" близкую пару образуют разные тела.

Возникновение устойчивости по Хиллу при переходе от поверхностей нулевой кинетической энергии к поверхностям Зундмана обусловлено отсутствием головной части у областей возможности движения, вследствие чего при больших  $C$  невозможен переход изображающей точки из одной "ноги" в другую. Теоретически изображающая точка может осуществить такой переход, но для этого ей нужно пройти через начало координат, т.е. через тройное соударение тел. Далее мы будем предполагать, что тройное соударение отсутствует.

Уменьшение постоянной  $B$  не изменяет отмеченного качественного характера поверхностей Зундмана до тех пор, пока эта постоянная не достигнет значения  $B_1$ , при котором поверхность Зундмана проходит через особую точку  $L_1$  на грани  $ODE$  пирамиды  $P$ . Поверхность Зундмана при этом располагается по обе стороны грани  $OAD$  пирамиды  $P$ , т.е. и во внешней (не имеющей физического смысла) области. На сечении плоскостью  $q_{12} = (q_{12})_{L_1}$  (это сечение на рисунках не изображено) точка  $L_1$  располагается между точками  $D$  и  $E$ . Точка  $L_1$  принадлежит сразу двум "ногам" упомянутой "треноги". Эта точка характеризует предел устойчивости по Хиллу, так как при  $B < B_1$  появляется общая часть этих областей, и изображающая точка может переместиться по ней из одной "ноги" в другую, иллюстрируя обмен компонентами в системе трех тел: тело  $M_3$  из спутника тела  $M_1$  может стать спутником тела  $M_2$ , и наоборот. Но при  $B < B_1$  в роли спутника не могут выступать тела с большими массами  $M_1$  и  $M_2$ . Только при  $B < B_2$  и, тем более, при  $B < B_3$  тело  $M_2$  из спутника тела  $M_1$  может стать спутником тела  $M_3$ . Если массы тел окажутся равными, то все прямолинейные особые точки достигаются одновременно при  $B_1 = B_2 = B_3$ .

По достижении значения  $B_3$  область недоступности располагается в центральной части пирамиды  $P$ , охватывая ее высоту. Размеры области недоступности неограниченно уве-

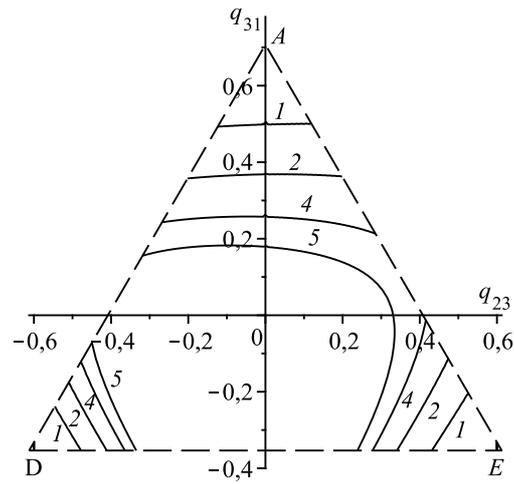


Рис. 4.7. Сечения поверхностей Зундмана плоскостью  $q_{12} = 1$  для  $C = 0.6$  и значений масс  $m_1 = 1/2$ ,  $m_2 = 1/3$ ,  $m_3 = 1/6$ . Обозначения кривых: 1 –  $B = 0.05$ , 2 –  $B = 0.0167$ , 3 –  $B = 0.0119$ , 4 –  $B = 0.005$ , 5 –  $B = 0$  (сечение поверхности нулевой кинетической энергии).

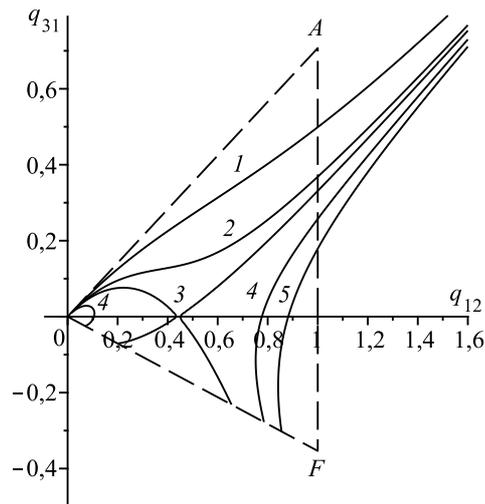


Рис. 4.8. Сечения поверхностей Зундмана плоскостью  $q_{23} = 0$ . Все обозначения - см. рис. 4.7

личиваются с удалением в бесконечность от начала координат. В окрестности прямолинейных точек наблюдается сужение области недоступности, которое при уменьшении постоянной Зундмана до  $B = B_{45}$  стягивается в особую точку  $L_{45}$ .

Дальнейшее уменьшение  $B$  приводит к разрыву области недоступности на две части. Область возможности движений становится похожей на фигуру с шестью "ногами" и двумя головными частями. Одна головная часть - прежняя точка  $O$ , а другая - некоторая область вокруг точки  $L_{45}$ . Обе головные части связаны друг с другом тремя "ногами", а из второй головной части исходят в бесконечность еще три "ноги". Иными словами, у исходной "треноги" появилась еще одна головная часть вблизи точки  $L_{45}$ .

При последующем уменьшении  $B$  до 0 область недоступности между точками  $O$  и  $L_{45}$  стягивается в особую точку  $O$ , а вторая часть области недоступности преобразуется в аналогичную область для поверхности нулевой кинетической энергии  $U = C$ .

На этом процедура уменьшения  $B$  от  $\infty$  до 0 и соответствующего изменения поверхностей Зундмана от ребер и граней пирамиды  $P$  до поверхности нулевой кинетической энергии при заданном значении  $C > 0$  заканчивается.

Поверхности Зундмана (как и поверхности нулевой кинетической энергии) при  $C > 0$  допускают уход в бесконечность только одного тела и не допускают полного распада тройной системы.

Если же  $C \leq 0$ , то поверхности Зундмана имеют другой вид. Для  $C = -0.6$  сечения этих поверхностей представлены на рис. 4.9 и 4.10. Как видно из рисунков, никаких областей устойчивости по Хиллу или по Лагранжу такие поверхности не допускают. Области возможности движений в этом случае для любых значений  $B$  допускают как уход одного из тел в бесконечность так и полный распад системы трех тел.

В ограниченной задаче трех тел под устойчивостью по Хиллу понимают "вечное" пребывание тела малой массы внутри поверхности нулевой относительной скорости, имеющей конечные размеры и охватывающей одно из основных тел,

т.е. тело пренебрежимо малой массы осуществляет движения спутникового типа около одного из основных притягивающих тел.

Использование понятия устойчивости по Хиллу в общей задаче трех тел имеет свою специфику, обусловленную равноправием всех трех масс как активно гравитирующих. Во-первых, понятие устойчивости относится ко всем трем телам, т.е. можно рассматривать спутниковый тип движения отдельно для каждой пары тел:  $M_1$  и  $M_2$ ,  $M_2$  и  $M_3$ ,  $M_3$  и  $M_1$ . Во-вторых, в отличие от ограниченной задачи трех тел для спутникового типа движений в общей задаче третье тело может удалиться от близкой пары на значительное и даже бесконечное расстояние, так как поверхность Зундмана имеет неограниченные размеры.

Учитывая указанную специфику, в общей задаче трех тел, строго говоря, следует использовать понятие "устойчивости типа Хилла". Но и в ограниченной и в общей задаче трех тел речь идет об одном и том же - о спутниковом типе движения какой-то пары тел. Поэтому вполне возможно и в общей задаче трех тел использовать понятие "устойчивости по Хиллу", в качестве динамической характеристики спутникового типа движений.

Дадим следующее определение устойчивости по Хиллу в общей задаче трех тел. Если в системе трех тел существует пара тел  $M_i$  и  $M_j$ , для которой с помощью поверхности Зундмана можно указать конечную постоянную величину  $a_{ij} > 0$  такую, что в любой момент времени  $t \in (-\infty, +\infty)$ , включая начало отсчета  $t_0$ , выполняется неравенство

$$r_{ij}(t) \leq a_{ij} = const, \quad (4.35)$$

где  $r_{ij}$  - изменяющееся в процессе движения взаимное расстояние между телами  $M_i$  и  $M_j$ , то движения этой пары тел будем называть *устойчивыми по Хиллу*. Величина постоянной  $a_{ij}$  в изображающем пространстве  $r_{12}r_{23}r_{31}$  представляет собой расстояние от плоскости  $r_{ij} = 0$  до максимально удаленной от этой плоскости точки (при наличии таковой) соответствующей поверхности Зундмана. Предельным значени-

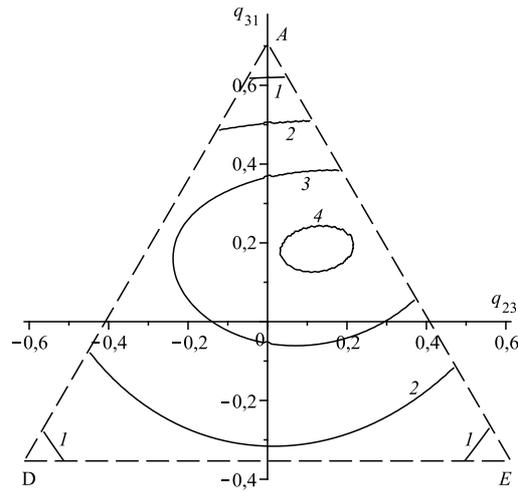


Рис. 4.9. Сечения поверхностей Зундмана плоскостью  $q_{12} = 1$  для  $C = -0.6$  и значений масс  $m_1 = 1/2, m_2 = 1/3, m_3 = 1/6$ . Обозначения кривых: 1 –  $B = 0.3$ , 2 –  $B = 0.016$ , 3 –  $B = 0.012$ , 4 –  $B = 0.107$ , 5 –  $B = 0.05$ .

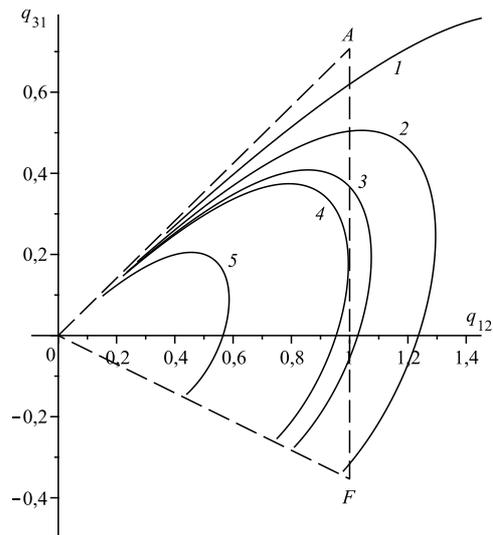


Рис. 4.10. Сечения поверхностей Зундмана плоскостью  $q_{23} = 0$ . Все обозначения - см. рис. 4.9

ем для величины  $a_{ij}$  является координата  $r_{ij}$  особой точки  $L_1$  или  $L_2$ .

Важно отметить, что устойчивость движений по Хиллу в конкретной тройной системе может выполняться только для какой-либо одной пары тел. Иными словами, невозможны движения устойчивые по Хиллу сразу для двух или трех пар тел одновременно. Если устойчивой по Хиллу является пара тел  $M_1, M_2$ , то движения двух других пар тел  $M_1, M_3$  или  $M_2, M_3$  будут неустойчивыми по Хиллу. Это очевидно из ранее изложенного, ибо изображающая точка в пространстве взаимных расстояний может находиться только в одной из трех "ног", гарантируя устойчивость только одной пары тел. Сразу в двух или трех непересекающихся "ногах" изображающая точка находиться не может.

Возможность ухода третьего тела в бесконечность при устойчивом по Хиллу движении близкой пары означает, что движения системы трех тел при этом неустойчивы по Лагранжу. Устойчивость по Хиллу гарантирует только невозможность распада рассматриваемой тесной пары и не исключает возможность распада системы трех тел как целого.

Чтобы установить критерий устойчивости по Хиллу для любых исходных данных, необходимо для заданных значений масс и постоянной  $C$  вычислить величину постоянной Зундмана  $B_1$  в первой прямолинейной особой точке. Построение областей устойчивости на плоскости "постоянная  $C$  - постоянная Зундмана  $B$ " проведено численно. Результаты вычислений представлены на рис. 4.11.

Все области устойчивости располагаются правее и выше соответствующей кривой. При значениях  $C$  и  $B$ , близких к нулевым, всегда имеет место неустойчивость по Хиллу. Устойчивость появляется только для значений  $C$  и  $B$ , удаленных от осей координат на некоторые величины. При выполнении условия  $C \leq 0$  никаких областей устойчивости не существует.

Кривые 1, 2, и 4, изображенные на рис. 4.11, определяют спутниковый тип движения одновременно для всех пар тел:  $M_1$  и  $M_3$ ,  $M_2$  и  $M_3$ ,  $M_1$  и  $M_2$ . При  $B < B_1$  в случае равных

масс получается неустойчивость по Хиллу. Но если значения масс удовлетворяют условию  $m_1 \geq m_2 > m_3$ , то область устойчивости пары наиболее массивных тел  $M_1$  и  $M_2$  расширяется до  $B \geq B_2$ , где  $B_2 < B_1$  - постоянная Зундмана, вычисленная в точке либрации  $L_2$ . Тело наименьшей массы при этом находится на значительном удалении от массивных тел и может даже удалиться в бесконечность. Для пар  $M_1$  и  $M_3$  или  $M_2$  и  $M_3$  в этом случае имеет место неустойчивость по Хиллу, так как тело  $M_3$  может из спутника тела  $M_1$  стать спутником тела  $M_2$  и наоборот (см. рис. 4.7 и 4.8). Граница этой области устойчивости  $B = B_2$  также представлена на рис. 4.11 (кривая 3). Значение  $B_3$  не вносит никаких новых результатов в исследование устойчивости по Хиллу, что видно из рис. 4.7 и 4.8.

Окончательно условия устойчивости по Хиллу при  $m_1 \geq m_2 \geq m_3$  можно сформулировать в виде:

$$\begin{aligned} B \geq B_1 & - \text{устойчивость любой пары тел,} \\ B \geq B_2 & - \text{устойчивость только одной пары тел } M_1 \text{ и } M_2 \\ & \text{с наибольшими массами,} \end{aligned} \tag{4.36}$$

где  $B_2 < B_1$  при  $m_1 \geq m_2 > m_3$  и  $B_2 = B_1$  при  $m_1 \geq m_2 = m_3$ .

Возможность существования устойчивых по Хиллу движений устанавливается условиями (4.36) сразу для трех пар тел, но какая конкретно пара реализует устойчивое движение можно определить по начальным условиям, проверяя принадлежность изображающей точки к конкретной "ноге". Устойчивой парой тел будет та, параметры которой удовлетворяют неравенству (4.35) в начальный момент времени.

В качестве примера рассмотрим систему Солнце ( $M_1$ ) - Юпитер ( $M_2$ ) - Сатурн ( $M_3$ ). Принимая для этой системы значения  $B = 0,4658 \cdot 10^{-5}$ ,  $C = 0,1064 \cdot 10^{-3}$  и вычисляя величину  $B_1 = 0,4492 \cdot 10^{-5}$  для этого значения  $C$ , убеждаемся, что  $B > B_1$ , т.е. выполняется условие (4.36) для устойчивости движений по Хиллу. Остается проверить начальные положения тел. Координаты особой точки  $L_1$  в си-

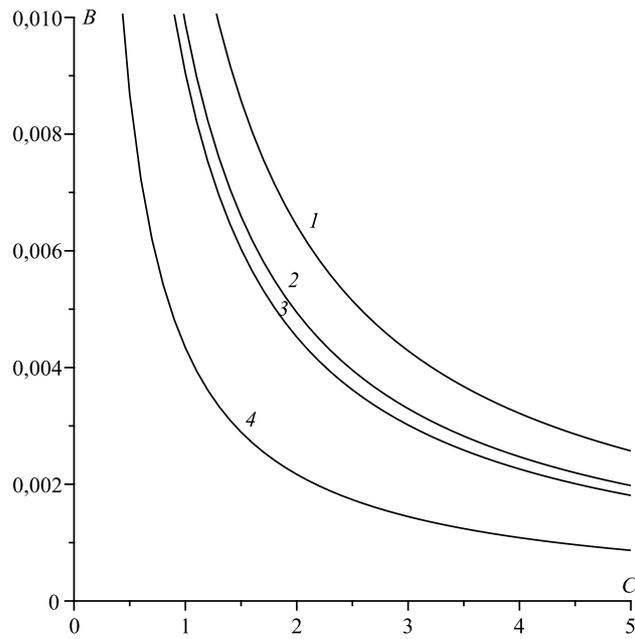


Рис. 4.11. Области устойчивости по Хиллу. Обозначения: 1 -  $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ , 2 -  $m_1 = 1/2, m_2 = 1/3, m_3 = 1/6$  (устойчивость любой пары тел), 3 - при тех же значениях масс, но устойчивость только одной пары тел  $M_1$  и  $M_2$ , 4 -  $m_1 = m_2 = 0.495, m_3 = 0.01$ .

стеме  $r_{12}, r_{23}, r_{31}$  имеют значения (в а.е.):

$$L_1 = (5,937; 0,4286; 5,508).$$

А значения этих координат на эпоху  $t_0 = JD\ 244\ 1200.5$  равны:

$$r_{12}(t_0) = 5,060; \quad r_{23}(t_0) = 13,02; \quad r_{31}(t_0) = 9,016.$$

Учитывая неравенства

$$5,060 < 5,937; \quad 13,02 > 0,4286; \quad 9,016 > 5,508,$$

заключаем, что в системе Солнце-Юпитер-Сатурн устойчивым по Хиллу является движение только одной пары - Солн-

це-Юпитер. Юпитер никогда не сможет удалиться от Солнца более, чем на 5,937 а.е.

Движения двух других пар Солнце-Сатурн и Юпитер-Сатурн оказываются неустойчивыми по Хиллу. Это согласуется с известными аналитическими и численными результатами, согласно которым тело наименьшей массы обладает наибольшей возможностью удаления от двух более массивных тел.

Поверхности Зундмана позволяют установить устойчивость движений в смысле Хилла для отдельных пар тел. Более того, если удастся установить устойчивость по Хиллу какой-то пары тел, то две другие пары тел оказываются неустойчивыми по Хиллу, а третье тело (не входящее в устойчивую пару) обладает принципиальной возможностью ухода в бесконечность.

Изложенные результаты хорошо вписываются в известную классификацию движений в задаче трех тел, предложенную Виктором Себекеем, включая финальные движения, и позволяют ввести в эту классификацию новый параметр - постоянную Зундмана  $B = c^2/2$ .

Возможны следующие наиболее интересные типы движений:

- "разлет" или "распад" при  $h \geq 0$ ,  $B \geq 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I = \infty$ , когда все три тела с параболическими или гиперболическими скоростями удаляются от барицентра,

- "уход" или "выброс" при любых  $h$  и  $B$  и при  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I = \infty$ , когда одно из тел удаляется на бесконечно большое расстояние от двух других, образующих тесную пару,

- "обращение" при  $h < 0$ ,  $I < I_0 = const$  и  $B > B_1$ , когда система состоит из тесной пары и удаленного на конечное расстояние третьего тела (это устойчивые по Хиллу движения одной пары тел),

- "захват" и "обмен" при  $h < 0$  и  $B > B_1$ , когда тело  $M_3$  из спутника тела  $M_1$  становится спутником тела  $M_2$ .

## Глава 5

# ВВЕДЕНИЕ В АСТРОДИНАМИКУ

*Астродинамикой* называют раздел науки, изучающий поступательные и вращательные движения искусственных небесных тел. Все результаты, рассмотренные в предыдущих разделах, остаются справедливыми и для искусственных небесных тел. Вместе с тем появляется много новых факторов, влияющих на движение космических аппаратов. Это "новые" силы, которые в классической небесной механике обычно не рассматриваются. Далее обсуждаются три наиболее важные: реактивная сила двигателя, нецентральность поля тяготения и сопротивление атмосферы планеты.

### 5.1 Импульсные маневры космических аппаратов

Для выполнения маневров на борту космических аппаратов располагают двигательные установки, позволяющие создать реактивную силу, действующую в определенном направлении. По величине создаваемой двигателем силы различают двигатели малой и большой тяги.

К двигателям малой тяги относятся электрореактивные

двигатели (ЭРД), солнечный и изотопный парус. По рабочему телу электрореактивные двигатели различаются на плазменные и ионные. Двигатели малой тяги характеризуются большим временем работы, но создают малые ускорения космическому аппарату. Впервые в мире ЭРД были испытаны на советских космических кораблях "Восход-1" и "Зонд-2" в 1964 году.

С помощью двигателя малой тяги скорость движения космического аппарата, находящегося на круговой орбите вблизи планеты, можно увеличить от первой космической до второй. При этом происходит "раскрутка" аппарата, заключающаяся в том, что движение осуществляется по некоторой медленно раскручивающейся спирали, в каждый момент времени мало отличающейся от круговой орбиты, а скорость остается близкой к местной круговой. И только после нескольких сотен оборотов (витков) вокруг планеты орбита космического аппарата становится гиперболической, и аппарат покидает планету.

Для двигателей большой тяги (ЖРД - жидкостные реактивные двигатели или РДТТ - реактивные двигатели твердого топлива) при осуществлении маневров на орбите время работы двигателя является малой величиной по сравнению с периодом обращения вокруг планеты. Поэтому вводят понятие *импульсного* маневра, т.е. считают, что разгон аппарата происходит мгновенно. Скорость движения аппарата изменяется скачком на некоторую конечную величину.

Чтобы оценить величину скачка скорости, рассмотрим движение ракеты в бессиловом поле. Для этого в уравнении (1.279) положим  $\vec{F} = 0$ :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{w} \frac{dm}{dt}. \quad (5.1)$$

Если считать относительную скорость истечения "рабочего тела" постоянной  $\vec{w} = const$ , то из уравнения (5.1) получим

$$\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{w} \ln \frac{m}{m_0} \quad (5.2)$$

или при нулевой начальной скорости  $\vec{V}_0 = 0$

$$\vec{V} = \vec{w} \ln \frac{m}{m_0}. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называют *формулой Циолковского*. Это уравнение связывает изменение скорости с изменением массы. Иными словами, оно определяет импульс скорости  $\Delta \vec{V}$  в зависимости от массы выгоревшего топлива  $\Delta m$  при заданной в качестве характеристики двигателя относительной скорости истечения массы  $\vec{w}$ . Несмотря на грубые предположения при выводе ( $\vec{F} = 0$ ), формула Циолковского дает достаточно хороший результат в случае малого интервала времени работы двигателя, когда остается малым интеграл  $\int_{t_0}^t |\vec{F}| dt$ . Поэтому при проектировании космических аппаратов эта формула широко используется. Приращение скорости, определяемое формулой Циолковского, называют *характеристической скоростью*. Эта формула определяет такую величину скорости, которую приобрел бы космический аппарат при отсутствии потерь от многочисленных возмущающих факторов.

В качестве примера импульсного маневра космических аппаратов рассмотрим *гомановский* перелет с одной круговой орбиты на другую, предполагая, что орбиты лежат в одной плоскости. Такой маневр предложил Гоман в 1924 г. для осуществления межпланетных перелетов космических кораблей. Идея перелета состоит в том, что в некоторой точке начальной круговой орбиты с помощью мгновенно отработавшего двигателя аппарат приобретает дополнительный импульс скорости  $\Delta V_1$  (мгновенное изменение скорости) по касательной к орбите и переходит на эллиптическую орбиту с перигеием, совпадающим с точкой подачи импульса скорости. Величина импульса скорости выбирается такой, чтобы в апоцентре эллиптическая орбита соприкасалась со второй круговой орбитой. В точке соприкосновения подается второй импульс скорости  $\Delta V_2$  (второе включение двигателя) также по касательной к орбите. Величину второго импульса

скорости выбирают равной разности между местной круговой скоростью и скоростью аппарата в апогее эллиптической орбиты. В результате аппарат оказывается на круговой орбите назначения.

Используя формулы эллиптического движения, можно определить величину суммарного импульса скорости  $\Delta V_\Sigma$  для гомановского перелета в виде

$$\begin{aligned} \Delta V_\Sigma &= \Delta V_1 + \Delta V_2 = \\ &= V_I \left[ \left( \sqrt{\frac{2k}{1+k}} - 1 \right) + \left( \sqrt{\frac{1}{k}} - \sqrt{\frac{2}{k(1+k)}} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $V_I$  - орбитальная скорость аппарата на начальной орбите, а  $k = r_F/r_i$  - отношение радиусов конечной и начальной орбит.

Доказательство оптимальности гомановского перелета, вообще говоря, представляет собой вариационную задачу минимизации энергетических затрат, зависящих от выбора траектории перелета с одной круговой орбиты на другую. Однако, с учетом первых интегралов задачи двух тел, это доказательство можно свести к доказательству минимума функции двух переменных. Учитывая большое значение гомановских перелетов в астродинамике, проведем доказательство их оптимальности.

Пусть на начальной круговой орбите, характеризующейся индексом  $I$ , радиусом круговой орбиты  $r_I$  и начальной круговой скоростью  $\vec{V}_I$ , выбрана некоторая точка с индексом 1, в которой в произвольном направлении мгновенно подается импульс скорости  $\Delta \vec{V}_1$ . После чего движущийся аппарат приобретает скорость

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_I + \Delta \vec{V}_1, \quad (5.5)$$

направленную под углом  $\theta_1$  к местному горизонту. Модуль подаваемого импульса скорости должен быть достаточным для достижения орбиты назначения - второй круговой орбиты, обозначаемой индексом  $F$  с радиусом  $r_F$  и круговой

орбитальной скоростью  $\vec{V}_F$ , в некоторой точке с индексом 2. Скорость аппарата в момент достижения круговой орбиты назначения обозначим через  $\vec{V}_2$ , а ее наклон к местному горизонту - через  $\theta_2$ .

Для того, чтобы аппарат остался на круговой орбите назначения к нему необходимо приложить импульс скорости  $\Delta\vec{V}_2$ , такой чтобы выполнялось равенство

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_F + \Delta\vec{V}_2. \quad (5.6)$$

Модули импульсов скорости по теореме косинусов определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \sqrt{V_1^2 + V_I^2 - 2V_1V_I \cos \theta_1}, \\ \Delta V_2 &= \sqrt{V_2^2 + V_F^2 - 2V_2V_F \cos \theta_2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

а суммарный импульс скорости, определяющий энергетические затраты (характеристическую скорость), необходимую на такой перелет, тогда получается в виде

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (5.8)$$

Как видно из (5.7) и (5.8) суммарный импульс скорости зависит от четырех неизвестных величин

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_\Sigma(V_1, V_2, \theta_1, \theta_2). \quad (5.9)$$

Но с помощью интеграла энергии и интеграла площадей для перелетной орбиты

$$V_1^2 - \frac{2\mu}{r_I} = V_2^2 - \frac{2\mu}{r_F}, \quad V_1 r_I \cos \theta_1 = V_2 r_F \cos \theta_2 \quad (5.10)$$

число неизвестных можно уменьшить на две единицы. Для этого с помощью (5.10) нужно исключить скорости  $V_1$  и  $V_2$  по формулам

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\mu \left( \frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_F} \right)}{1 - \left( \frac{r_I \cos \theta_1}{r_F \cos \theta_2} \right)^2}}, \quad V_2 = V_1 \frac{r_I \cos \theta_1}{r_F \cos \theta_2}. \quad (5.11)$$

Формулы (5.11) определяют зависимости скоростей  $V_1$  и  $V_2$  от двух независимых переменных величин  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Если эти зависимости подставить в (5.7), (5.8), а затем и в (5.9) то получим зависимость суммарной характеристической скорости от переменных  $\theta_1$  и  $\theta_2$

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_\Sigma(\theta_1, \theta_2). \quad (5.12)$$

Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  входят в выражение для  $\Delta V_\Sigma$  только под знаком косинуса, поэтому при дифференцировании по этим углам появляется множитель  $\sin \theta_1$  или  $\sin \theta_2$ . Необходимые условия экстремума функции двух переменных  $\Delta V_\Sigma(\theta_1, \theta_2)$  тогда принимают вид

$$\frac{\partial \Delta V_\Sigma}{\partial \theta_1} = -\sin \theta_1 \frac{\partial \Delta V_\Sigma}{\partial(\cos \theta_1)} = 0, \quad \frac{\partial \Delta V_\Sigma}{\partial \theta_2} = -\sin \theta_2 \frac{\partial \Delta V_\Sigma}{\partial(\cos \theta_2)} = 0. \quad (5.13)$$

Все входящие сюда производные легко вычисляются, например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta V_\Sigma}{\partial(\cos \theta_1)} &= \frac{\partial \Delta V_1}{\partial(\cos \theta_1)} + \frac{\partial \Delta V_2}{\partial(\cos \theta_1)}, \\ \frac{\partial \Delta V_\Sigma}{\partial(\cos \theta_2)} &= \frac{\partial \Delta V_1}{\partial(\cos \theta_2)} + \frac{\partial \Delta V_2}{\partial(\cos \theta_2)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \Delta V_1}{\partial(\cos \theta_1)} = -\frac{V_1 V_I}{\Delta V_1} + \frac{V_1 - V_I \cos \theta_1}{\Delta V_1} \frac{\partial V_1}{\partial(\cos \theta_1)}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial(\cos \theta_1)} = \frac{V_1}{1 - \left( \frac{r_I \cos \theta_1}{r_F \cos \theta_2} \right)^2} \frac{r_I^2 \cos \theta_1}{r_F^2 \cos^2 \theta_2}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \Delta V_2}{\partial(\cos \theta_1)} = \frac{V_2 - V_F \cos \theta_2}{\Delta V_2} \frac{\partial V_2}{\partial(\cos \theta_1)}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial(\cos \theta_1)} = V_1 \frac{r_I}{r_F \cos \theta_2} + \frac{\partial V_1}{\partial(\cos \theta_1)} \frac{r_I \cos \theta_1}{r_F^2 \cos \theta_2}. \quad (5.18)$$

Аналогично вычисляются производные по  $\cos \theta_2$ .

Необходимые условия экстремума выполняются при

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0, \quad (5.19)$$

т.е. для случая, когда мгновенный импульс скорости подается по касательной к круговой орбите ( $\theta_s = 0$  или  $\theta_s = \pi$ , где  $s = 1, 2$ ), что доказывает выполнение необходимых условий для гомановского перелета.

Проверки выполнения достаточных условий минимума энергетических затрат гомановского перелета можно не проводить, так как из физических соображений ясно, что максимума затрат не существует (он - бесконечен).

Гомановский маневр является оптимальным по сравнению с другими двухимпульсными маневрами. Но если рассматривать трехимпульсные маневры, то, как показал русский исследователь Ари Штернфельд, можно определить более экономные (в смысле меньшего значения характеристической скорости) маневры, называемые также биэллиптическими.

Однако непосредственно использовать гомановский маневр для межпланетных перелетов в поле притяжения Солнца невозможно, так как вблизи каждой из планет имеется область, внутри которой притяжение космического аппарата планетой оказывается значительно большим его притяжения Солнцем. Поэтому вводят понятие *сферы действия планеты*, внутри которой траекторию движения космического аппарата сначала приближенно рассчитывают по формулам задачи двух тел планета-космический аппарат, а вне сферы действия - задачи Солнце-космический аппарат (по гомановскому эллипсу). В дальнейшем проводят более точные расчеты с помощью численного интегрирования уравнений движения.

Также с помощью численного интегрирования рассчитывают траектории выведения аппарата на орбиту и траектории "мягкой посадки" на большие планеты или их спутники.

## 5.2 Нецентральность поля тяготения

В небесной механике ввиду больших расстояний между телами считается, что тела притягиваются как точки (или

как тела со сферической структурой распределения масс). В астродинамике космические аппараты могут длительное время находиться вблизи планет. Поэтому необходимо учитывать нецентральность поля тяготения планеты. Для этого потенциал тяготения планеты представляют в форме разложения в ряд по шаровым функциям:

$$U = \frac{fm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{nk}(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right], \quad (5.20)$$

где  $m$  - масса планеты,  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  - планетоцентрический радиус, широта и долгота,  $r_0$  - средний экваториальный радиус планеты,  $P_n$  - полиномы Лежандра,  $P_{nk}$  - присоединенные функции Лежандра,  $J_n$ ,  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$  - постоянные параметры, характеризующие гравитационное поле планеты.

В этом разложении члены, содержащие полиномы Лежандра, называются *зональными гармониками*. Они характеризуют полярное сжатие планеты. А члены, содержащие присоединенные функции Лежандра, называются *тессеральными гармониками*. Они характеризуют экваториальное сжатие планеты.

Поле тяготения Земли определяется безразмерными константами  $J_2 = 1,08210^{-3}$ ,  $J_3 = -2,5710^{-6}$ ,  $J_4 = -1,8410^{-6}$  и т.д. Все коэффициенты кроме  $J_2$  имеют порядок  $10^{-6}$  и меньше. Поэтому основной вклад в возмущенное движение искусственных спутников Земли вносит вторая зональная гармоника с коэффициентом  $J_2$ . Записывая уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов орбиты спутника и вычисляя вековые возмущения первого порядка, для близкой к круговой орбите на высоте 500 км можно установить, что вековые возмущения первого порядка за один оборот (виток) спутника для большой полуоси, эксцентриситета и наклона равны нулю, а для остальных элементов отличны от

нуля:

$$\begin{aligned}\delta_1 \Omega &\simeq -0,^\circ 5 \cos i, & \delta_1 \omega &\simeq -0,^\circ 25 (5 \cos^2 i - 1), \\ \delta_1 M_0 &\simeq -0,^\circ 25 (3 \cos^2 i - 1).\end{aligned}\quad (5.21)$$

Отсюда видно, что при учете только вековых членов первого порядка орбита ИСЗ не изменяет своей формы и наклона к плоскости экватора Земли. Но положение орбиты в пространстве изменяется вековым образом. А именно, плоскость орбиты прецессирует: при  $i < 90^\circ$  - это регрессия орбиты, при  $i > 90^\circ$  - прогрессия, а при  $i = 90^\circ$  плоскость орбиты остается неизменной в пространстве.

Линия апсид орбиты спутника также вращается: в положительном направлении при  $i < 63,^\circ 5$  и при  $i > 116,^\circ 5$ , и в отрицательном направлении при  $63,^\circ 5 < i < 116,^\circ 5$ . Значения наклона  $i = 63,^\circ 5$  и  $i = 116,^\circ 5$  называют *критическими*. Линия апсид ИСЗ при таких наклонах остается неизменной в неподвижном пространстве.

Если высоту орбиты спутника увеличивать, то числовые коэффициенты в формуле (5.21) будут уменьшаться и обратятся в нуль при бесконечно большом увеличении высоты орбиты над поверхностью Земли. Это согласуется с известным результатом теории притяжения, согласно которому все тела на очень больших расстояниях притягивают как точки.

### 5.3 Сопротивление атмосферы

При движении космического аппарата в атмосфере планеты на него действует аэродинамическая сила

$$\vec{Q} = \{Q_x, Q_y, Q_z\}, \quad (5.22)$$

где  $Q_x$  - аэродинамическое сопротивление,  $Q_y$  - подъемная сила,  $Q_z$  - боковая сила. Космические аппараты обычно имеют произвольную форму, поэтому основной возмущающей силой является сила аэродинамического сопротивления атмосферы для тела, близкого по форме к сфере. Далее рассмотрим влияние только этой силы.

В аэродинамике силу сопротивления атмосферы представляют в виде

$$Q_x = -\frac{\rho V^2}{2} c_x S, \quad (5.23)$$

где  $\rho$  - плотность атмосферы,  $V$  - скорость движения космического аппарата,  $S$  - характерная площадь (миделева сечения),  $c_x$  - коэффициент аэродинамического сопротивления. Знак минус в правой части (5.23) означает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную скорости движения аппарата. Возмущающее ускорение, создаваемое этой силой, представимо в виде

$$\frac{Q_x}{m} = -\sigma q, \quad (5.24)$$

где  $\sigma = \frac{c_x S}{m}$  - баллистический коэффициент,  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  - "скоростной напор".

Максимальное значение коэффициента аэродинамического сопротивления для тел неправильной формы в плотных слоях атмосферы (на высотах полета самолетов), где длина свободного пробега молекул много меньше размеров движущегося тела, составляет примерно  $c_x \simeq 1$ . А в разреженных слоях атмосферы (на высотах полетов искусственных спутников планет), где длина свободного пробега молекул много больше размеров спутников, коэффициент аэродинамического сопротивления достигает значений  $c_x = 2 \div 2.2$ .

Баллистический коэффициент  $\sigma$  характеризуется отношением площади поперечного сечения тела к его объему. Для тел, имеющих большие размеры (типа надувных баллонов)  $\sigma$  принимает большие значения, а для небольших, но массивных тел величина  $\sigma$  мала.

Наиболее неприятным параметром при проведении расчетов траекторий движения искусственных спутников в атмосфере планеты является плотность атмосферы. Дело в том, что значение плотности испытывает колебания с разными периодами и даже иррегулярные изменения. Все эти

колебания связаны, в конечном счете, с корпускулярной активностью Солнца. К таким колебаниям относятся:

- суточные, характеризующиеся отношением максимального значения плотности к минимальному  $k = \rho_{max}/\rho_{min}$  в диапазоне  $k = 2 \div 10$ ,
- колебания с периодом 27 суток (период вращения Солнца вокруг своей оси) -  $k = 2 \div 3$ ,
- полугодовые колебания -  $k = 2 \div 3$ ,
- 11-летний цикл солнечной активности -  $k = 3 \div 20$ ,
- иррегулярные колебания (заранее не предсказуемые солнечные вспышки) - когда отношение  $k$  максимальной плотности к минимальной изменяется в несколько раз.

Меньший интерес для изучения движений искусственных спутников представляют колебания солнечной активности с большими периодами - 110-летний цикл, 1100-летний цикл и др. Но особую неприятность представляют иррегулярные колебания, которые заранее не прогнозируются.

Если исходная орбита близка к круговой, то под влиянием сопротивления атмосферы происходит постепенное снижение высоты орбиты, а форма орбиты остается близкой к круговой. Если считать баллистический коэффициент  $\sigma$  малым параметром, то вековые изменения радиуса орбиты и скорости движения спутника на небольшом интервале времени можно представить формулами

$$\delta r = -2\pi\sigma g\rho r^2, \quad \delta V = \pi\sigma g\rho\sqrt{\mu r}, \quad (5.25)$$

где  $\mu$  - гравитационный параметр планеты,  $g$  - ускорение силы тяжести. Из (5.25) видно, что при торможении в атмосфере спутник разгоняется. Этот парадокс легко объясняется с помощью закона сохранения энергии.

Если далее рассмотреть исходную сильно вытянутую (с большим эксцентриситетом) орбиту, можно заметить, что основной эффект торможения происходит в окрестности перигея орбиты, так как в окрестности ее апогея плотность атмосферы значительно меньше. Процесс торможения здесь иногда сравнивают с "чирканием", когда все торможение происходит вблизи перигея, а на остальной ча-

сти орбиты практически вообще отсутствует. Такой процесс приводит к резкому снижению высоты апоцентра при практическом сохранении высоты перигея. С уменьшением эксцентриситета различие в торможении вблизи перигея и апоцентра уменьшается, но всегда сильнее уменьшается высота апоцентра. Поэтому можно заключить, что торможение в атмосфере стремится эллиптическую орбиту преобразовать в круговую, продолжая последующее снижение ее высоты.

Постепенное снижение высоты орбиты спутника продолжается до входа в плотные слои атмосферы (для Земли это  $150 \div 200$  км). После этого происходит достаточно резкое снижение, которое при отсутствии управления этим процессом приводит к резкому увеличению температуры на поверхности спутника и его сгоранию.

Время от момента вывода космического аппарата на орбиту до входа в плотные слои атмосферы называют *временем существования* или *временем жизни* спутника. В зависимости от начальных условий и исходных параметров время существования может изменяться от нескольких месяцев и менее до нескольких лет и даже десятков лет.

# Литература

- [1] Е.П.Аксенов. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
- [2] Е.А.Гребеников, А.Козак-Сковородкина, М.Якубян. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М. Изд-во Рос. ун-та дружбы народов. 2007.
- [3] Е.А.Гребеников, Ю.А.Рябов. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.
- [4] В.Г.Голубев, Е.А.Гребеников. Проблема трех тел в небесной механике. М. Изд-во. Моск. ун-та, 1985.
- [5] Г.Н.Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
- [6] Г.Н.Дубошин. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
- [7] А.П.Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
- [8] К.Маршал. Задача трех тел. М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.
- [9] В.Себехей, Теория орбит. М.: Наука, 1982.
- [10] М.Ф.Субботин. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.

- [11] А.Уинтнер. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967.
- [12] К.В.Холшевников, В.Е.Титов. Задача двух тел. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2007.
- [13] К.Шарлье. Небесная механика. М.: Наука, 1966.
- [14] Е.Штифель, Г.Шейфеле. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.
- [15] П.Е.Эльясберг. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
- [16] П.Эскобал. Методы астродинамики. М.: "Мир", 1971.

## .1 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ

1. Уравнения абсолютного движения в общей задаче трех тел. Общее определение первого интеграла, общего интеграла, общего решения. Вывод интегралов движения центра масс.

2. Вывод уравнений относительного движения. Определение общего решения абсолютного движения по известному общему решению относительного движения.

3. Вывод уравнений барицентрического движения и уравнений движения в поле неподвижного центра.

4. Вывод интеграла площадей в относительном движении. Уравнение плоскости орбиты.

5. Вывод интеграла энергии в относительном движении. Поверхность нулевой скорости.

6. Вывод интеграла Лапласа.

7. Вывод двух зависимостей между первыми интегралами.

8. Интеграл, содержащий явно время в относительных прямоугольных и орбитальных полярных координатах.

9. Общий интеграл уравнений относительного движения.

10. Вывод уравнения орбиты в относительных и орбитальных координатах.

11. Переход от относительной к орбитальной системе координат.

12. Кеплеровские элементы орбиты, их связь с постоянными интегрирования.

13. Получение общего решения в относительной системе координат двумя способами.

14. Интегрирование задачи двух тел с помощью уравнения Бине.

15. Общий интеграл уравнений абсолютного движения. Связь постоянных интегрирования абсолютного и относительного движений.

16. Определение типа невозмущенного движения по кепле-

ровским элементам орбиты, по постоянным интегрирования, по начальным условиям.

17. Определение эксцентрической аномалии. Вывод зависимости между эксцентрической и истинной аномалией.

18. Вывод уравнения Кеплера. Метод итераций для его решения.

19. Период обращения по эллиптической орбите. Определение масс планет, обладающих спутниками.

20. Алгоритм вычисления координат и скоростей в эллиптическом движении.

21. Вывод аналога уравнения Кеплера для гиперболического движения.

22. Алгоритм определения координат и скоростей в гиперболическом движении.

23. Вывод уравнения Баркера.

24. Алгоритм определения координат и скоростей в параболическом движении.

25. Вычисление невозмущенных эфемерид для малых тел Солнечной системы.

26. Разложения в ряды Фурье координат и скоростей в эллиптическом движении.

27. Разложения координат и скоростей в эллиптическом движении в ряды по степеням эксцентриситета. Предел Лапласа.

28. Разложения координат и скоростей в эллиптическом движении в ряды по степеням времени. Общее представление о регуляризации решений и уравнений невозмущенного движения.

29. Задача двух тел с переменными массами. Вывод уравнения Мещерского. Уравнения Гильдена-Мещерского и уравнения Мещерского-Леви-Чивиты. Консервативная задача двух тел с переменными массами, вывод первых интегралов для относительного движения в этой задаче.

30. Задача многих тел. Уравнения абсолютного движения. Десять классических интегралов. Формулировка теорем о несуществовании других интегралов.

31. Вывод уравнения Лагранжа-Якоби, его приложения.

32. Уравнения относительного движения в задаче многих тел. Пертурбационная функция. Уравнения барицентрического движения, уравнения в координатах Якоби.

33. Определение оскулирующих элементов. Основная операция для вывода дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах.

34. Вывод уравнений Ньютона-Эйлера для фокального параметра, долготы восходящего узла и наклона.

35. Вывод уравнений Ньютона-Эйлера для эксцентриситета, аргумента перицентра и средней аномалии в эпоху. Особенности в правых частях уравнений Ньютона-Эйлера.

36. Метод вариации произвольных постоянных для канонических уравнений движения задачи двух тел. Элементы Якоби. Вывод явной зависимости элементов Якоби и кеплеровских элементов с помощью решения уравнения Гамильтона-Якоби методом разделения переменных.

37. Вывод уравнений Лагранжа для оскулирующих кеплеровских элементов, используя канонические уравнения для элементов Якоби.

38. Аналитическая структура решения уравнений для оскулирующих элементов с учетом зависимости правых частей уравнений от малого параметра. Форма рядов для представления правых частей уравнений движения. Порядок возмущений, вековые и периодические возмущения.

39. Теорема Лапласа о возмущениях первого порядка в большой полуоси.

40. Теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы.

41. Ограниченная круговая задача трех тел. Вывод уравнений движения и интеграла Якоби.

42. Точки либрации в ограниченной круговой задаче трех тел.

43. Поверхности нулевой скорости. Устойчивость по Хиллу.

44. Ограниченная эллиптическая задача трех тел. Вывод уравнений движения. Точки либрации.

45. Гомографические частные решения общей задачи трех

тел.

46. Поверхности Зундмана в общей задаче трех тел.

47. Квазиинтеграл Якоби в ограниченной эллиптической задаче трех тел. Закон сохранения энергии. Поверхности минимальной энергии.

48. Гомановские перелеты космических аппаратов. Межпланетные перелеты.

49. Влияние нецентральности поля тяготения Земли на движения ИСЗ.

50. Влияние сопротивления атмосферы на движение ИСЗ.